ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А.А.ЖДАНОВА

Редколлегия журнала
"Вестник ЛГУ, серия
математика, механика,
астрономия"

УДК 517.987.5

№ 7384-В88.

А.Н.ЛИВШИЦ

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ АДИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И АВТОМОРФИЗМОВ ПОДСТАНОВКИ

ЛЕНИНГРАД
1988

В ряде работ формулируются достаточные условия наличия или отсутствия у подстановок или адических преобразований ([I , 2 , 3 , 4]) дискретного, или непрерывного спектра, или рассматриваются примеры ([4] и библиография [4], [5 , 6 , 7 , 8]). Целью данной работы является рассмотрение примеров, иллюстрирующих различные ситуации, встречающиеся при использовании достаточных условий работ ([6 , 7 , 8]). Попутно формулируются и доказываются некоторые общие факты. Все примеры либо предложены А.М.Вершиком, либо так или иначе связаны с попытками ответить на его вопросы.

§ I. Матрицы адических преобразований, связанных со схемами Дынкина

Рассмотрим задачу исследования адического сдвига, построенного по схеме Дынкина [9].

Прежде всего поставим в соответствие произвольному конечному графу без кратных дуг адическое преобразование с симметричной матрицей (конструкция [I0] сообщена автору А.М.Вершиком). Предположим, что (D, U) - граф с множеством вершин D (число их обозначим через $\# D$) и дуг - U . Пусть $\# D = m$. Введем понятие удвоения графа. Пусть $D = \{d_i\}_1^m$ и D_1, D_2 - конечные множества $\# D_1 = \# D_2 = \# D$; $D_j = \{d_i^j\}_1^m$; $j = 1, 2$. $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Обозначим $D_1 \cup D_2$ через D' и назовем удвоением графа (D, U) граф (D', U') , дуги которого определены следующим образом: потребуем, чтобы вершины $D1$ были попарно не соединены, так же, как и вершины D_2, и чтобы d_i^2 была соединена с d_j^1 тогда и только тогда, когда d_i соединена с d_j . Рассмотрим наряду с D_1 и D_2 множество $D_3 = \{d_i^3\}_1^m$ и построим граф с вершинами $D_3 \cup D_2$ удвоение (D, U) . С учетом всех дуг получится граф с вершинами $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Утроением назовем граф с $D_1 \cup D_3$ в качестве множества всех вершин и совокупности всех путей, ведущих из D_1 в D_3 - в качестве множества дуг.

Мы можем построить теперь наш основной объект - адическое преобразование с пространством состояний D_1 и симметричной

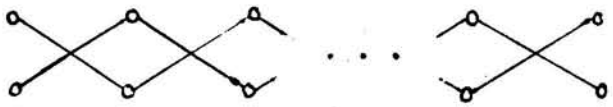
© ... 88 г.

матрицей переходов Π , определяемой матрицей инцидентности утроения как граф с кратными дугами. $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ π_{ij} - число дуг, соединяющих d_i^1 с d_j^3 .

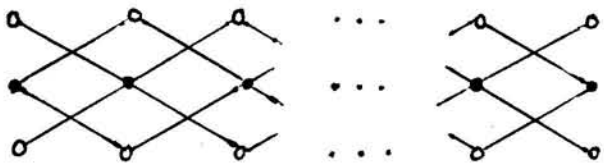
Пусть исходный граф соответствует схеме Дынкина A_n [9]



Удвоение



Утроение

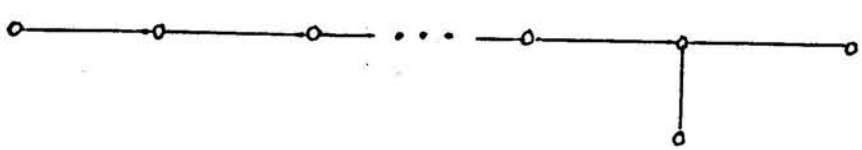


$$\Pi = \begin{pmatrix} 1010\ldots000 \\ 0201\ldots000 \\ 1020\ldots000 \\ 0102\ldots000 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0000\ldots201 \\ 0000\ldots020 \\ 0000\ldots101 \end{pmatrix}$$

Удвоение имеет симметричную матрицу, но на связных компонентах графа она не симметрична, у утроения - симметрична. При распадении (в случае четных или нечетных размерностей) могут встретиться матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1100\ldots000 \\ 1210\ldots000 \\ 0121\ldots000 \\ 0012\ldots000 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0000\ldots210 \\ 0000\ldots120 \\ 0000\ldots011 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 110\ldots00 \\ 121\ldots00 \\ 012\ldots00 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 000\ldots21 \\ 000\ldots12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 21\ldots00 \\ 12\ldots00 \\ \ldots\ldots \\ 00\ldots21 \\ 00\ldots12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 21\ldots000 \\ 12\ldots000 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00\ldots210 \\ 00\ldots121 \\ 00\ldots011 \end{pmatrix}$$

D_n :



Утроение выглядит так:



Матрица такова:

$$\begin{pmatrix} 1010\ldots0000 \\ 0201\ldots0000 \\ 1020\ldots0000 \\ 0102\ldots0000 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0000\ldots2011 \\ 0000\ldots0300 \\ 0000\ldots1011 \\ 0000\ldots1011 \end{pmatrix}$$

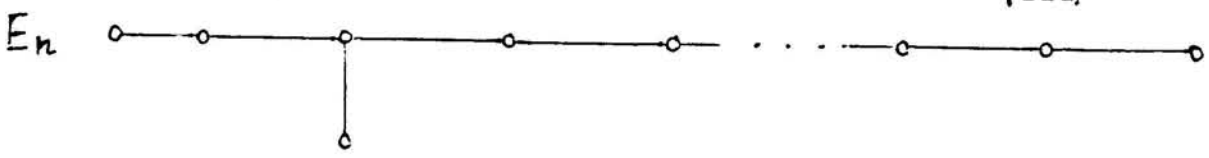
Она распадается на 2. Типы матриц, могущих фигурировать в роли одной из этих двух, суть

$$\begin{pmatrix} 11\ldots00 \\ 12\ldots00 \\ \ldots\ldots \\ 00\ldots21 \\ 00\ldots13 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 21\ldots00 \\ 12\ldots00 \\ \ldots\ldots \\ 00\ldots21 \\ 00\ldots13 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 11\ldots0000 \\ 12\ldots0000 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00\ldots2100 \\ 00\ldots1201 \\ 00\ldots0011 \\ 00\ldots0111 \end{pmatrix}$$

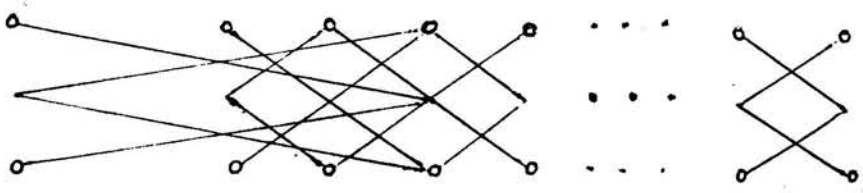
$$\begin{pmatrix} 21\ldots000 \\ 12\ldots000 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00\ldots201 \\ 00\ldots011 \\ 00\ldots111 \end{pmatrix}$$

При $n = 4$ эти матрицы суть

(3) и $\begin{pmatrix} 111 \\ 111 \\ 111 \end{pmatrix}$



Утроенный граф



Матрица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1010\ldots000 \\ 0101\ldots000 \\ 1021\ldots000 \\ 0103\ldots000 \\ 0012\ldots000 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0000\ldots201 \\ 0000\ldots020 \\ 0000\ldots101 \end{pmatrix}$$

при $n=5$: $\begin{pmatrix} 10100 \\ 01000 \\ 10201 \\ 00030 \\ 00101 \end{pmatrix}$.

Она тоже распадается на две. Перечень всех встречающихся при этом типов матриц таков:

$$\begin{pmatrix} 110\ldots00 \\ 121\ldots00 \\ 012\ldots00 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 000\ldots21 \\ 000\ldots12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 110\ldots00 \\ 121\ldots00 \\ 012\ldots00 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 000\ldots21 \\ 000\ldots11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 110\ldots00 \\ 131\ldots00 \\ 012\ldots00 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 000\ldots21 \\ 000\ldots12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 110\ldots00 \\ 131\ldots00 \\ 012\ldots00 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 000\ldots21 \\ 000\ldots11 \end{pmatrix}$$

При $n=5$: (1); (3); $\begin{pmatrix} 110 \\ 121 \\ 011 \end{pmatrix}$.

Наиболее простыми матрицами являются следующие:

$$A_n = \begin{pmatrix} 210\ldots00 \\ 121\ldots00 \\ 012\ldots00 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 000\ldots21 \\ 000\ldots12 \end{pmatrix}$$

Их мы и будем рассматривать. Развиваемая при этом техника может применяться и для матриц всех остальных типов. Основой рассмотрений, связанных со спектрами, являются определения и результаты работ [6 , 7 , 8] , а также их обобщения и конкретизации, содержащиеся в § 3 данной статьи. Сейчас приведем

только одно из необходимых определений - естественное определение набора слова X_i [7] для стационарного адического преобразования с матрицей M в том случае, когда не все элементы матрицы M равны 0 или I (граф переходов имеет кратные дуги. Именно: пусть i - й столбец имеет вид $b_{1i} \dots b_{mi}$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_k \le m$ - список всех j, таких, что $b_{ji} > 0$. В качестве X_i берем слово

$$\underbrace{j_1 \dots j_1}_{b_{j_1 i} \text{ раз}} \quad \underbrace{j_2 \dots j_2}_{b_{j_2 i} \text{ раз}} \quad \dots \quad \underbrace{j_k \dots j_k}_{b_{j_k i} \text{ раз}} .$$

По набору слов $\{X_i\}$ определяется преобразование ω_M [7].

§ 2. Характеристические полиномы, собственные векторы матриц A_n, последовательности $|W^l_{A_n}(s)|$

Вычислим прежде всего характеристические полиномы матриц A_n и их нули. Обозначим $P_n(t)$ - полином матрицы размерности n:

$$P_n(t) = \det(A_n - tI) .$$

Очевидно рекуррентное соотношение:

$$P_{n+1}(t) = (2-t)P_n(t) - P_{n-1}(t)$$

Имеем $P_1(t) = 2 - t$; $P_2(t) = t^2 - 4t + 3$.

Можно принять $P_0(t) \equiv 1$.

Естественно, что эти полиномы связаны с полиномами Чебышева ([II, I2]).

Пользуясь рекуррентным соотношением, легко найти корни полиномов $P_n(t)$. Обозначим корни полинома $P_n(t)$, упорядоченные по возрастанию, $t^{(n)}_k$; $1 \le k \le n$. Имеем $t^{(n)}_k = 2 - 2\cos\frac{\pi k}{n+1}$. Очевидно, $0 < t^{(n)}_k < 4$ при всех k и $t^{(n)}_k < 1$ при $k < (n+1)/3$.

Легко найти (с помощью аналогичных рекуррентных соотношений) и собственные векторы - столбцы X^k_n, отвечающие $t^{(n)}_k$. Можно взять в качестве $X^n_k = (x^n_{k,j})^n_{j=1}$ как в [I0] следующие векторы:

$$x^n_{k,j} = \sin j\left(\frac{\pi(n+1-k)}{n+1}\right); \quad 1 \le k, j \le n .$$

Обозначим $\alpha_k^n = \pi \times \frac{n+1-k}{n+1}$ $\left(t_k^{(n)} = 2 + 2\cos\alpha_k^n\right)$.

Пусть $e_s : 1 \le s \le n$ – вектор-столбец, s-компонента которого суть I, остальные – 0. Тогда, очевидно, длина слова $w_{A_n}^l(s)$ есть сумма компонент вектора $A_n^l e_s$, $1 \le l \le \infty$.

Если разложение e_s по векторам X_k^n имеет вид $e_s = \sum y_k^s X_k^n$, то получим:

$$\left|w_{A_n}^l(s)\right| = \sum_{k=1}^{n} \left(t_k^{(n)}\right)^l y_k^s \sum_{j=1}^{n} \sin j\alpha_k \qquad (I)$$

Последовательность несет информацию, ценную для определения спектра ([6 , 7 , 8] и др.).

§ 3. Основные необходимые результаты о тригонометрических полиномах, рекуррентных последовательностях и о спектрах адических преобразований и подстановок

3.I. Дадим сводку необходимых тригонометрических тождеств ([I3] примеры I.342, I.392, [I4] пример 36I).

а) $\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{nx}{2} \operatorname{cosec}\frac{x}{2}$;

б) $\sin nx = n\sin x \cos x \prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}\right)$: n –четное ;

в) $\sin nx = n\sin x \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}\right)$: n – нечетное ;

г) $$\begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \dots & \sin\alpha_m \\ \sin 2\alpha_1 & \sin 2\alpha_2 & \dots & \sin 2\alpha_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin m\alpha_1 & \sin m\alpha_2 & \dots & \sin m\alpha_m \end{vmatrix} = (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} 2^{m(m-1)} \times \prod_{s=1}^{m} \sin\alpha_s \times$$
$$\times \prod_{m \ge i > k \ge 1} \sin\frac{\alpha_i + \alpha_k}{2} \times \prod_{m \ge i > k \ge 1} \sin\frac{\alpha_i - \alpha_k}{2} .$$

Преобразуем правую часть равенства а), пользуясь равенствами б) и в) и тем, что $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

Обозначая сумму $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ через $R_n(x)$, имеем

$$R_n(x) = (n+1)\, n\, 2^{-n} \sin x \times \prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\sin \frac{k\pi}{n}\right)^{-2} \times \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(\sin \frac{k\pi}{n+1}\right)^{-2} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \left(\cos x - \cos \frac{2k\pi}{n}\right) \times \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(\cos x - \cos \frac{2k\pi}{n+1}\right)$$

при n – четном и

$$R_n(x) = (n+1)\, n\, 2^{-n} \sin x \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\sin \frac{k\pi}{n}\right)^{-2} \times \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\sin \frac{k\pi}{n+1}\right)^{-2} \times \quad (2)$$

$$\times \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\cos x - \cos \frac{2k\pi}{n}\right) \times \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\cos x - \cos \frac{2k\pi}{n+1}\right)$$

при n – нечетном.

Из этих формул видно, что все полиномы – произведения от $\cos x$ (четырех видов), встречающиеся в их правых частях, имеют рациональные коэффициенты. В самом деле, каждый из них является наибольшим общим делителем двух полиномов от $\cos x$: $\frac{R_n(x)}{\sin x}$ и $\frac{R_{n-1}(x)}{\sin x}$ либо $\frac{R_n(x)}{\sin x}$ и $\frac{R_{n+1}(x)}{\sin x}$.

Вследствие того, что $\cos \frac{k\pi}{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{k\pi i}{n+1}} + e^{-\frac{k\pi i}{n+1}}\right)$, из теоремы о неприводимости кругового многочлена [15] следует, что имеют рациональные коэффициенты и неприводимы над полем рациональных чисел следующие полиномы от t:

$\varphi_n(t) = \prod \left(t - \cos \frac{k\pi}{n+1}\right)$ при n – нечетном и

$k: 1 \le k \le n$,

k нечетно, $(k, n+1) = 1$

$\varphi(t)=\prod\left(t-\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$ при n – четном

$k: 1\le k\le n$,

k – нечетно,

$(k,n+1)=1$ см. также [10], 1.2, Rem 4

Преобразуем также формулу г)

$$D(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]}2^{(m-1)m}\prod_{j=1}^{m}\sin\alpha_j\prod_{m\ge i>j\ge 1}(\cos\alpha_j-\cos\alpha_i) \quad (3)$$

3.3. Сформулируем утверждение, резюмирующее основные элементарные факты теории рекуррентных линейных последовательностей (см., например, [11]) над полем C, ограничиваясь для простоты случаем, когда все корни характеристического уравнения простые. Пусть полином $f(u)=a_0u^m+a_1u^{m-1}+\dots+a_{m-1}u+a_m;\ a_0a_m\neq 0$ имеет простые корни $u_1,\dots,u_m$ и $v=(v_1,\dots v_m)$ – m-мерный комплексный вектор.

Предложение. Существует единственный полином $g_v(u)$ степени $<m$, такой, что последовательность $h_l=\sum_{k=1}^{m}g_v(u_k)\left(u_kf'(u_k)\right)^{-1}u_k^l$ удовлетворяет рекуррентному соотношению. $a_mh_l+a_{m-1}h_{l+1}+\dots+a_1h_{l+m-1}+a_0h_{l+m}=0;\ l>0$ и $h_l=v_l$ при $1\le l\le m$.

Точная формула для полинома $g_v(u)$ следующая:

$$g_v(u)=\sum_{i=1}^{m}v_ia_{m-i}+u\sum_{i=1}^{m-1}v_ia_{m-i-1}+u^2\sum_{i=1}^{m-2}v_ia_{m-i-2}+\dots+u^{m-1}\sum_{i=1}^{1}v_ia_{1-i}.$$

Предложение доказывается непосредственным решением системы линейных уравнений с определителем Вандермонда. Заметим, что если $v=(u_k,u_k^2,\dots,u_k^m)$, то $g_v(u)=u_kf(u)/(u-u_k)$ при $u\neq u_k$ и $g_v(u_k)=u_kf'(u_k)$. Если a_i, v_i – целочисленные, то g_v имеет целые коэффициенты.

3.4. Будем считать, что мы имеем дело с подстановкой, определяемой набором слов $\mathcal{A}$ в алфавите Z ([3, 8]), имеющей примитивную матрицу $C_{\mathcal{A}}$ и свойство ОДД – однознач-

ного допустимого декодирования ([4 , 7 , 8 , I6 , I7]). Вследствие связи, имеющей место между подстановками и адическими преобразованиями ([6 , 8]), можно этим случаем ограничиться - формулировки для адических автоморфизмов в терминах ω_m аналогичны (причем требуется только примитивность матрицы переходов). В некоторых случаях перевод на язык адических автоморфизмов все же будет делаться.

Два символа из $\mathcal{Z}$ a и b будем считать эквивалентными, если при каждом $m>0$: $|\omega_A^m(a)|=|\omega_A^m(b)|$. Таким образом, $\mathcal{Z}$ разбит на классы эквивалентных символов. Пусть C - один из таких классов. Существует конечное число блоков вида $x_1 \dots x_\ell$, таких, что $x_1, x_\ell \in C$ и $x_2, \dots x_{\ell-1} \notin C$, входящих в допустимую последовательность (это следует, например, из компактности X_A и минимальности). Для адического автоморфизма, соответственно, существует конечное число блоков такого вида, входящих в какое-либо слово вида $\omega_m^\ell(s)$ - это можно доказать непосредственно или путем построения эквивалентной подстановки. Назовем такие блоки C-блоками.

Будем называть два слова одной длины из $\mathcal{Z}$: $A=a_1 \dots a_k$ и $B=b_1 \dots b_k$ словами эквивалентной номенклатуры, если существует такая перестановка π множества $(1, \dots, k)$, что символы a_i и $b_{\pi(i)}$ - эквивалентны при каждом i: $1 \le i \le k$.

Назовем C - первичной парой базовых слов пару слов вида $\begin{matrix} x_1 \dots x_{\ell-1} \\ x_2 \dots x_\ell \end{matrix}$, где $x_1 \dots x_\ell$ C - блок. Множество C-первичных пар обозначим через Δ_C. Будем требовать от подстановки нецикличности ([I8]), от адического отображения соответственно, что найдутся два пути $P_1=a_1 \dots a_\ell$ и $P_2=a_1' \dots a_\ell'$ с $a_1'=a_1$ и $a_\ell'=a_\ell$ такие, что их образы при адическом отображении однозначно определены и имеют разные первые символы, которые будем обозначать (так же, как какие-либо их аналоги, естественно, существующие, для подстановки) через c и d.

Теорема I. а) Предположим, что в алфавите $\mathcal{Z}$ существует конечный набор слов $\{y_i\}$, выделено множество Δ пар слов (y_{i_k} , y_{j_k}) эквивалентной номенклатуры так, что

для любой пары $(x,y)\in\Delta\cup\Delta_C$ (при некотором фиксированном C) существует натуральное $N_{x,y}$ такое, что $\omega_{\mathcal{A}}^{N(x,y)}(x)=y_{l_1}\dots y_{l_s}$ и $\omega_{\mathcal{A}}^{N(x,y)}(y)=y_{k_1}\dots y_{k_s}$, где каждая пара $(y_{l_r},y_{k_r})\in\Delta\cup\Delta_C$ и хотя бы для одного r: $y_{l_r}=y_{k_r}$. Тогда спектр автоморфизма дискретен.

б) Предположим, что в алфавите $\mathcal{Z}$ найдется конечный набор слов $\{y_i\}$ и возрастающая последовательность натуральных чисел m_i, такие, что при каждом i: $\omega_{\mathcal{A}}^{m_i}(c)=y_{j_1}\dots y_{j_s}A$; $\omega_{\mathcal{A}}^{m_i}(d)=y_{k_1}\dots y_{k_s}B$, где A или B – пустое слово, при любом t: $1\le t\le s$; $y_{j_t}\neq y_{k_t}$ и слова y_{j_t} и y_{k_t} имеют эквивалентную номенклатуру. В этом случае спектр автоморфизма подстановки имеет непрерывную компоненту.

Эта формулировка является уточнением формулировки [7]. Сформулируем теперь достаточное условие слабого перемешивания, являющееся уточнением условия [8] для случая, когда корни характеристического полинома простые. Оно является простым следствием результатов [6] и [8]. Будут рассматриваться случаи ОДД-подстановки $T_{\mathcal{A}}: X_{\mathcal{A}}\to X_{\mathcal{A}}$ и адического преобразования с примитивной матрицей M.

Пусть $f_T(t)=(-1)^n t^n+a_1 t^{n-2}+\dots+a_{n-2}t+a_n$ – характеристический полином матрицы $C_{\mathcal{A}}$ (соответственно, матрицы M). Назовем последовательность λ_k натуральных чисел, удовлетворяющую рекуррентному соотношению $\lambda_{k+n}(-1)^n+a_1\lambda_{k+n-1}+\dots a_n\lambda_k=0$, хорошей, если существует блок вида $a_1a_2\dots a_l$; $a_1=a_l$, входящий в допустимую последовательность (то есть в последовательность из $X_{\mathcal{A}}$) такой, что $\lambda_k=\sum_{i=1}^{l-1}|\omega_{\mathcal{A}}^k(a_i)|$. Очевидно, что $(|\omega_{\mathcal{A}}^{k+1}(1)|,|\omega_{\mathcal{A}}^{k+1}(2)|,\dots,|\omega_{\mathcal{A}}^{k+1}(n)|)=G_{\mathcal{A}}(|\omega_{\mathcal{A}}^k(1)|,|\omega_{\mathcal{A}}^k(2)|,\dots,|\omega_{\mathcal{A}}^k(n)|)$. Такие последовательности рассматривались в [6].

Дадим определение хороших последовательностей для стационарного адического автоморфизма $T_M: X_M\to X_M$, где X_M – марковский компакт, построенный по матрице M, а T_M – его адическое преобразование. Пусть $P_1=y_0,\dots,y_l$ и $P_2=z_0,\dots z_l$ – два пути длины l, причем $y_0=z_0$, $y_l=z_l$, $P_1<P_2$. Определим последовательность натуральных чисел $N_m(P_1,P_2)$. Для любого пути $x_0,\dots,x_m,y_0,\dots,y_l$, $x_{m+l+2},\dots\in X_M$, путь $x_0,\dots,x_m,z_0,\dots,z_l,x_{m+l+2},\dots$

тоже принадлежит X_M и для некоторого K, не зависящего от x_i, имеет место $T^K(x_0,\dots,x_m,y_0,\dots,y_l,x_{m+l+2},\dots)=x_0,\dots,x_m, y_0,\dots,y_l,x_{m+l+2},\dots$ Положим $N_m(P_1,P_2)=K$. При фиксированных P_1, P_2 последовательность $N_m(P_1,P_2)$ – рекуррентная, соответствующая характеристическому полиному матрицы M. Назовем хорошими все последовательности вида $N_m(P_1,P_2)$. Такое же определение примем и для обобщенного адического автоморфизма [8].

Очевидно, что если обобщенный адический автоморфизм построен по подстановке [8], то соответствующие классы хороших последовательностей совпадают. Последовательности $\omega=\{\omega_k\}$ соответствует вектор $\nu_\omega=(\nu_1,\dots,\nu_n)$, $\nu_i=\omega_i;\ i=1,\dots,n$. Вектору ν_ω соответствует, в свою очередь, полином g_{ν_ω}. Предположим, что все корни $t_1,\dots,t_n$ полинома $f_T(t)$ – простые.

Теорема 2. Пусть $\omega=\{\omega_k\}$ – хорошая последовательность и не существует такого k_0, что все ω_k, $k>k_0$ имеют общий делитель, больший I, а также не существует полинома с целыми коэффициентами, постоянного и иррационального на множестве $\{t_i \mid g_{\nu_\omega}(t_i)\neq 0 \& t_i\geq 1\}$. Тогда автоморфизм подстановки обладает слабым перемешиванием.

Замечание. Если $\omega=\{\omega_k\}$ – хорошая последовательность для подстановки и наряду с рекуррентным соотношением, отвечающим полиному $f_T(t)$ удовлетворяет иному рекуррентному рациональному соотношению с полиномом f^*, то теорема 2 верна, если вектор ν_ω, полином g_{ν_ω} и множество корней $\{t_i\}$ рассматривать для полинома f^* $(\dim \nu_\omega=\deg f^*)$.

Ясно, что для матрицы A_n все последовательности вида $|W^k_{A_n}(s)|$ при фиксированном S – хорошие. Докажем, что последовательность $|W^k_{A_n}(n)|$ удовлетворяет первому требованию теоремы 2. В самом деле, если все числа $|W^k_{A_n}(n)|$ при $K>K_0$ имеют общий делитель $d>1$, то из определения A_n ясно, что d делит все числа $|W^k_{A_n}(s)|;\ 1\leq s\leq n;\ K>K_0$ – невозможность этого вытекает из очевидной леммы.

Лемма. Пусть $f(t)=t^n+\dots+a_{n-1}t+a_n$ – целочисленный полином такой, что для некоторой целочисленной матрицы

$A: f(A)=0$. Пусть для некоторого целого κ: $\kappa \mid a_n$ и $\kappa \nmid a_{n-1}$. Пусть далее для некоторого целочисленного вектора a: $\kappa \mid A^s a$, где s - натуральное число. Тогда $\kappa \mid Aa$.

§ 4. Спектры адических преобразований с матрицами A_n

Теорема 3. Для $n=2$ и для $n=3$ спектр адических преобразований с матрицами A_n дискретен, для $n>3$ адические преобразования обладают слабым перемешиванием.

Доказательство. $n=2$. Набор слов X_i суть: $X_1=112$, $X_2=122$. I эквивалентно 2, поэтому единственная нетривиальная первичная пара базовых слов суть $\{1\}; \{2\}$. Добавим пары $(\{1\},\{1\})$ и $(\{2\},\{2\})$ мы, очевидно, исчерпаем $\Delta \cup \Delta C$. Собственные числа - все числа вида $\exp(2\pi\kappa i/3^m)$, где κ, m натуральные. $n=3$. Перечень базовых слов и их пар весьма обширен. Уменьшим его, учитывая симметрию, заключающуюся в возможности чтения слов справа с последующей заменой I ↔ 3. В качестве класса C возьмем $\{2\}$. Первичные пары базовых слов будут:

2I	23	уже	2II	23I
I2	32	ненужная	II2	3I2

233	23II	233I	233II
332	3II2	33I2	33II2

ненужная

К ним добавляются следующие пары:

I	2	3	ненужная	I2	223I
I	2	3		23	I2I2

223II	3II22	3II22	22323
I2II2	23233	23233	I2I22

23233I	23233II	233233II	3I223II2I2
3II2I2	3II2II2	33II2II2	2232332331

3II2I223I2	33II2II2I223II2I2
23I2232331	233233I2232332331

3311211212231121112 | 311211212231122
2332331223233233311 | 232331223233233

3311211212231121112 | 3311211212231121112
2323312232332331 | 23233122323323311

Группа собственных чисел суть $\{exp(2\pi i \times \gamma \times P(2+\sqrt{2}))\}$, где γ - некоторое рациональное а P пробегает все целочисленные полиномы.

$n \geqslant 4$. В качестве хорошей последовательности выберем $L=\{|\omega^{l}_{An}(n)|\}_{l=1}^{\infty}$. Для определения корней g_{v_L} найдем коэффициенты y^n_k из разложения (I) § 2 (вектора l_n). В определителе $D(\alpha^n_1, \ldots, \alpha^n_n)$ алгебраическое дополнение элемента $\sin n\alpha^n_k$ есть $(-1)^{n+k} D(\alpha^n_1, \ldots, \hat{\alpha^n_k}, \ldots, \alpha^n_n)$, где $\hat{\alpha^n_k}$ означает, что из списка аргументов исключен α^n_k. Поэтому

$$y^n_k = (-1)^{n+k} D(\alpha^n_1, \ldots, \hat{\alpha^n_k}, \ldots, \alpha^n_n) / D(\alpha^n_1, \ldots, \alpha^n_n) =$$

$$2^{2(n-1)} (-1)^{n+k+\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n-1}{2}\right]} (\sin \alpha^n_k)^{-1} \prod_{\substack{j\neq k \\ 1\leq j\leq n}} (\cos\alpha^n_k - \cos\alpha^n_j)^{-1} (-1)^{k-1}$$

$$= 2^{2(n-1)} (\sin \alpha^n_k)^{-1} \left(\prod_{\substack{j\neq k \\ 1\leq j\leq n}} (\cos\alpha^n_k - \cos\alpha^n_j) \right)^{-1}.$$

Поскольку

$$\prod_{\substack{j\neq k \\ 1\leq j\leq n}} (\cos\alpha^n_k - \cos\alpha^n_j) = 2^{-n} \prod_{\substack{j\neq k \\ 1\leq j\leq n}} (2\cos\alpha^n_k - 2\cos\alpha^n_j) = 2^{-n} \cdot$$

$$\prod_{\substack{j\neq k \\ 1\leq j\leq n}} (t^{(n)}_j - t^{(n)}_k) = (-2)^n P_n'(t^{(n)}_k)$$

и ни для каких k, n $\sin \alpha^n_k \neq 0$, а нули полиномов от $\cos x$ вида $R_n(x)/\sin x$ найдены нами в § 3, имеем, что среди нулей полинома g_{v_L} содержатся те и только те

$t_k^{(n)}$, для которых $n+1-k$ четно.

Таким образом, по теореме 2 нам осталось доказать, что не существует такого целочисленного полинома $P(t)$, который принимал бы одно и то же иррациональное значение для всех $t_k \geq 1$, для которых $n+1-k$ нечетно, или, иначе, для тех $k \geq (n+1)/3$, для которых $n+1-k$ нечетно.

При $n = 4l+1$ к числу таких $t_k^{(n)}$ относится $t_k^{(n)} = 2$ $(k = 2l+1)$, поэтому $P(t_k^{(n)})$ рационально.

В остальных случаях доказательство является простым упражнением на использование неприводимости полиномов $\varphi_s(t)$ и рациональности их коэффициентов (§ 3) в силу следующего тривиального утверждения.

Предложение. Пусть $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – два полинома ненулевой степени с рациональными коэффициентами и β – комплексное число. Если $g_1(t) | (g_2(t)+\beta)$, то β рационально.

При n нечетном достаточно выбрать некоторое нечетное $k_0 : (n+1)/3 \leq k_0 < (n+1)/2$, заметить, что по предположению $P(t_{k_0}^{(n)}) = P(t_{n+1-k_0}^{(n)})$ и что вследствие неприводимости $\varphi_{(n+1)/(k_0, n+1)}$ это влечет $P(t_k^{(n)}) = P(t_{n+1-k}^{(n)})$ для всех k : $(k, n+1) = (k_0, n+1)$ (в том числе для k с этим свойством и $0 < k < (n+1)/3$) и применить предложение с $g_1 = \varphi_{(n+1)/(k_0, n+1)}$ и $g_2 = P$.

При n четном достаточно выбрать такое четное k_0, что $(n+1)/3 \leq k_0 \leq \frac{5}{6}(n+1)$ и $(k_0, n+1) = 1$. В качестве такого k_0 можно взять, например, степень двойки. В этом случае имеем $P(t_{k_0}^{(n)}) = P(t_{2k_0}^{(n)})$ (область значений k_0 расширена за пределы $n/2$ вследствие четности функции $\cos$). Но $t_{2k_0}^{(n)} = 4 - (t_{k_0}^{(n)} - 2)^2$, то есть соотношение снова полиномиальное, равенство $P(t_k^{(n)}) = P(t_{2k}^{(n)})$ снова имеет место для всех четных k, $0 < k < n+1$; $(k, n+1) = 1$; область $0 < k \leq \frac{n+1}{3}$ снова "захватывается" множеством постоянства P. Применение предложения завершает доказательство теоремы.

§ 5. Косые произведения

Известно, что матрица G_A и тем более ее характеристический полином (или матрицы M) не определяет спектр подстановки однозначно. Например, подстановка со смешанным

спектром, связанная с последовательностью Морса, имеет матрицу $G_{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, но такую же матрицу имеет циклическая подстановка $\begin{matrix}1\to 1\ 2\\ 2\to 1\ 2\end{matrix}$ и адический автоморфизм с чисто дискретным двоично-рациональным спектром. Более сложные примеры имеются в [I9] и [5]. Некоторую информацию о спектре характеристический полином $G_{\mathcal{A}}$ все же дает. Например, при естественных предположениях, если характеристический полином неприводим над полем рациональных чисел и среди его корней есть число Пизо, то спектр имеет дискретную компоненту (для адических преобразований это утверждение доказано в дипломной работе М.И.Соломяк; для подстановок см. также [4] (с .I4I).

Если полином приводим, то, как это будет видно ниже, наличие числа Пизо среди корней не гарантирует наличия дискретной компоненты. Одинаковую матрицу $G_{\mathcal{A}}$ могут иметь различные косые произведения с одной базой, поэтому изучение косых произведений и представление в виде косых произведений являются важными источниками получения примеров. Эти вопросы для подстановок и обобщенных последовательностей Морса интенсивно изучаются (см.,например, [4] с .I75 и библиографию [4]).

Мы изучим сейчас класс косых произведений над подстановками, вообще говоря, с непостоянной длиной слова.

Пусть $Z=\{1,\dots,n\}$ - алфавит, $\mathcal{A}=\{A\}_1^n$ - набор слов, $T_{\mathcal{A}}: X_{\mathcal{A}}\to X_{\mathcal{A}}$ - автоморфизм подстановки ([3, 8]). Рассмотрим конечное множество $Y\{1,\dots,m\}$. На нем действует симметрическая группа $\mathfrak{S}_m$.

Рассмотрим (по аналогии с [8]) множество U пар натуральных чисел $(l,g): 1\le l\le n;\ 1\le g\le |A_l|$ и произвольное сначала отображение $\pi: U\to \mathfrak{S}_m$. Построим новую подстановку. В качестве алфавита Z_1 возьмем декартово произведение $Z\times Y$. Набор слов $\mathcal{A}'=\{A_{(i,j)}\}_{1\le i\le n}^{1\le j\le m}$ будет строиться следующим образом: слово $A_{(i,j)}$ будет иметь одинаковую длину с A_i. Если A_l имело вид $a_1,\dots,a_s$, то $A_{(i,j)}=a_1^j,\dots,a_s^j$, где $a_e^j=(a_e,\pi(i,l)j)\in Z_1;\ 1\le l\le s$. От исходной матрицы $G_{\mathcal{A}}=\{g_{ij}\}_{i,j=1}^n$ мы требуем примитивности. Потребуем от отображения π, чтобы таковая

имела место и для $G_{A'}$. Очевидно, что если базовая подстановка ОДД, то подстановка $T': X_{A'} \to X_{A'}$ является косым произведением со слоем y над $T: X_A \to X_A$. Очевидно, что это косое произведение наследует свойство ОДД базы. В общем случае назовем $T': X_{A'} \to X_{A'}$ π -произведением.

Легко проверить (по аналогии с известными результатами [7], [18] и пр.), что спектр таких систем в случае нецикличности имеет непрерывную компоненту. Класс хороших последовательностей в смысле теоремы 2 для π -произведения уже, чем для базы, но если последовательность хороша для π -произведения и удовлетворяет для базы условиям теоремы 2, то по замечанию, следующему за теоремой 2, π -произведение слабо перемешивает. Взятие π -произведения (формальное) может улучшить свойства базы, например, "разрушить" цикличность, увеличить шансы на ОДД. Так, отправляясь от циклической подстановки $\begin{matrix} 1 \to 12 \\ 2 \to 12 \end{matrix}$ (которой, правда, соответствует 2 -адический автоморфизм), мы можем построить косое произведение со слоем $y = (1,2)$; если, обозначая образующую G_2 через V, выбрать: $\pi(1,1) = \pi(1,2) = \pi(2,1) = e$; $\pi(2,2) = V$ мы получим известную подстановку Рудина-Шапиро с лебеговской компонентой спектра (очевидно ОДД)

$$A_{(1,1)} = (1,1)(2,1)$$
$$A_{(1,2)} = (1,2)(2,2)$$
$$A_{(2,1)} = (1,1)(2,2)$$
$$A_{(2,2)} = (1,2)(2,1)$$

Взяв в качестве базовой циклическую подстановку $1 \to 11$, можно построить π -произведение со слоем $(1,2)$. Если положить $\pi(1,1) = e$, $\pi(1,2) = V$, то получим подстановку Морса

$$A_{(1,1)} = (1,1)(1,2); \quad A_{(1,2)} = (1,2)(1,1) .$$

Эта подстановка имеет дискретную и непрерывную компоненты. Множество π -произведений под подстановками вида $1 \to 11\ldots1$ совпадает с множеством автоматов в смысле [4] (ch. V)

Обозначим через f_A характеристический полином матрицы G_A . Сейчас мы проведем несложные выкладки, показываю-

щие, что $f_A | f_{A'}$, и выразим частное $f_{A'}/f_A$ как характеристический полином некоторой матрицы, что полезно для построения примеров. Матрица $G_{A'}$ является блочной и имеет следующий вид: $\begin{pmatrix} A_{11} \dots A_{1n} \\ \dots \\ A_{n1} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$, где

$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}^{ij} \dots a_{1m}^{ij} \\ \dots \\ a_{m1}^{ij} \dots a_{mm}^{ij} \end{pmatrix}$, $1 \le i,j \le n$ причем для любого l_0

$\sum_{l=1}^{m} a_{l l_0}^{ij} = g_{ij}$ для любого l_0: $\sum_{s=1}^{m} a_{l_0 s}^{ij} = g_{ij}$. (I)

Матрица $G_{A'}(t) = G_{A'} - tI$ тоже блочная с блоками $A_{ij}(t)$, равенство (I) для нее тоже имеет место с заменой всех g_{ii} на $g_{ii}(t) = g_{ii} - t$ ($g_{ij}(t) = g_{ij}$ при $i \neq j$)

Легко осуществить над столбцами и строками $G_{A'}(t)$ такие преобразования, чтобы в каждом блоке $A_{ij}(t)$ были выполнены следующие:

I) прибавление всех столбцов к m - му

$\begin{pmatrix} a_{11}^{ij}(t) \dots g_{ij}(t) \\ \dots \\ a_{m1}^{ij}(t) \dots g_{ij}(t) \end{pmatrix}$,

2) прибавление всех строк к последней

$\begin{pmatrix} a_{11}^{ij}(t) \dots g_{ij}(t) \\ \dots \\ a_{(m-1)1}^{ij}(t) \dots g_{ij}(t) \\ g_{ij}(t) \dots mg_{ij}(t) \end{pmatrix}$,

3) вычитание из всех строк последней, деленной на m :

$\begin{pmatrix} a_{11}^{ij}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} \dots 0 \\ \dots \\ a_{(m-1)1}^{ij}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} \dots 0 \\ g_{ij}(t) \dots mg_{ij}(t) \end{pmatrix}$

4) вычитание из всех столбцов последнего, деленного на m:

$$\begin{vmatrix} a^{ij}_{11}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & a^{ij}_{1m-1} - \frac{g_{ij}(t)}{m} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{ij}_{m-11}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & a^{ij}_{m-1m-1} - \frac{g_{ij}(t)}{m} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & mg_{ij}(t) \end{vmatrix}$$

Мы видим, что $f_A \mid f_{A'}$, и что $f_{A'} = m^n |G_A(t)| \times |D(t)| = m^n \times f_A \times |D(t)|$,

где

$$D(t) = \begin{vmatrix} c_{11}(t) \dots c_{1n}(t) \\ \dots \\ c_{n1}(t) \dots c_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

причем

$$C_{ij}(t) = \begin{vmatrix} a^{ij}_{11}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & a^{ij}_{1m-1}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{ij}_{m-11}(t) - \frac{g_{ij}(t)}{m} & \dots & a^{ij}_{m-1m-1} - \frac{g_{ij}(t)}{m} \end{vmatrix}.$$

Ясно, что если $i \neq j$, то $C_{ij}(t)$ не зависит от t, если $i = j$, то

$$C_{ij}(t) = C_{ij} + t \begin{vmatrix} -\frac{m-1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \\ +\frac{1}{m} & -\frac{m-1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{m} & \dots & \dots & -\frac{m-1}{m} \end{vmatrix} = C_{ij} + t F_m .$$

Необходимо осуществить такие преобразования над строками и столбцами и домножение строк или столбцов на m, чтобы F_m преобразовалось в $-I$. Можно выполнить их таким образом, и использовать множитель m^n, чтобы каждая клетка

$$C'_{ij} = \begin{vmatrix} c^{ij}_{11} & \dots & c^{ij}_{1m-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{ij}_{m-11} & \dots & c^{ij}_{m-1m-1} \end{vmatrix}$$

имела следующие элементы:

$$c_{11}^{ij} = g_{ij} - m a_{1m}^{ij} \; ; \; c_{1k}^{ij} = (a_{1k}^{ij} - a_{1m}^{ij}) m \; ; \quad k > 1 .$$

$$c_{l1}^{ij} = a_{1m}^{ij} - a_{lm}^{ij} \; ; \quad l > 1 .$$

$$c_{lk}^{ij} = a_{lk}^{ij} + a_{1m}^{ij} - a_{lm}^{ij} - a_{1k}^{ij} \; ; \quad l, k > 1 .$$

Блочная матрица

$$D' = \begin{pmatrix} c'_{11} & \dots & c'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c'_{n1} & \dots & c'_{nn} \end{pmatrix}$$

имеет характеристический полином, равный $f_{\mathcal{A}'} \mid f_{\mathcal{A}}$. Обозначим этот полином через $f_{\mathcal{A}'|\mathcal{A}}$. При $m=2$ матрицы c'_{ij} одномерны. Можно выбрать $c_{ij} = a_{11}^{ij} - a_{12}^{ij}$.

Пусть $\mathcal{A}$ определяет слабоперемешивающую подстановку из [7]

$$\begin{array}{l} I \longrightarrow II2 \\ 2 \longrightarrow I2222 \end{array} \qquad C_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & I \\ I & 4 \end{pmatrix}$$

Зафиксировав $m=2$, выберем такую D' , чтобы корнем $f_{\mathcal{A}'|\mathcal{A}}$ было число Пизо. Например, $D' = \begin{pmatrix} 2 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

$$C_{\mathcal{A}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & I & 0 \\ 2 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 2 & 2 \\ 0 & I & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

В качестве соответствующего $\mathcal{A}'$ можно взять

$A_{(1,1)} = (I,2)(I,2)(2,I)$ $\qquad A_{(1,2)} = (I,I)(I,I)(2,2)$

$A_{(2,1)} = (I,I)(2,2)(2,I)(2,I)(2,2)$

$A_{(2,2)} = (I,2)(2,I)(2,2)(2,2)(2,I)$

Из вышесказанного следует, что косое произведение слабо перемешивает, хотя среди корней $f_{\mathcal{A}'}$ есть число Пизо, ведь последовательность $\left| \omega_{\mathcal{A}}^{l}(2) \right|$ хороша для $\mathcal{A}'$.

§ 6. Доказательство теоремы I

Доказательство будет проводиться для случая адического стационарного автоморфизма без кратных дуг (т.е. $\pi_{ij} = 0$ или I). Остальные случаи рассматриваются аналогично. Дока-

зательства теорем такого типа для подстановок см. в [4].

Утверждение а)

Заметим, что набор слов $\{y_i\}$ и совокупность пар можно изменить таким образом, чтобы условие а) по-прежнему выполнялось с некоторой постоянной функцией пары $N_{x,y}$. Опишем это изменение. Пусть $N=\max\limits_{(x,y)\in\Delta\cup\Delta_C} N_{x,y}$, где $N_{x,y}$ - исходная функция. К исходному множеству пар Δ добавим множество Δ' пар слов вида $(\omega_M^k(x),\ \omega_M^k(y))$, где $(x,y)\in\Delta\cup\Delta_C$; $1\le k\le N_{x,y}$ слова же $\omega_M^k(x)$, $\omega_M^k(y)$ включим в набор $\{y_i\}$, отождествив в нем затем одинаковые слова, если таковые появятся. Теперь можно считать, что $N_{x,y}\equiv N$, сохранив прежнее Δ_C и рассматривая $\Delta\cup\Delta'$ в качестве нового Δ.

Зафиксировав некоторое $b\in C$, выберем L_0 такое, что при $L>L_0$, для каждого $a\in Z$ в слове $\omega_M^L(a)$ символ b встречается хотя бы дважды. Пусть $u_1\dots u_r$ такое подслово $\omega_M^L(a)$, что u_1 - первое вхождение b в $\omega_M^L(a)$, а u_r - последнее. Обозначим слово $u_1\dots u_{r-1}$ через $X_L^{a,b}$, а слово $u_2\dots u_r$ через $Y_L^{a,b}$. Ясно, что слова $X_L^{a,b}$ и $Y_L^{a,b}$ одной номенклатуры. Из условия а) и из постоянства $N_{x,y}$ следует, что для любого ε найдется такое K, что при $q>K$ для любых $a\in Z$ и $L>L_0$ доля символов, стоящих на одинаковых местах в словах $\omega_M^q(X_L^{a,b})$ и $\omega_M^q(Y_L^{a,b})$ и не совпадающих между собой $<\varepsilon$. Причем существует такое C_1, что в качестве K можно взять $[|C_1\ln\varepsilon|]$. Мы воспользуемся достаточным условием дискретности спектра [5], из которого следует, что если для сохраняющего меру автоморфизма $T:(\mathcal{X},\mathcal{U})\to(\mathcal{X},\mathcal{U})$ существует последовательность разбиений $\xi_m\to\varepsilon$ и рекуррентная последовательность натуральных чисел $q_m\to\infty$, такие что $\forall_k$, $\forall_{C'}\in\xi_k$ $\sum_n \mathcal{U}(T^{q_n}C'\Delta C')<\infty$, то спектр T дискретен. Для проверки выполнения этого условия возьмем в качестве ξ_m разбиение пространства путей Ω_m на множества следующего вида:

$$C'\in\xi_m \Leftrightarrow \left(\exists a_1,\dots,a_m\in Z;\ Ma_ia_{i+1}=1;\right.$$
$$\left. C'=\{\{x_i\}\in\Omega_M;\ x_1=a_1,\dots,x_m=a_m\}\right).$$

В качестве q_l возьмем $\{\{x_i\}_1^l ;\ M x_i x_{i+1}=1,\ x_l=b\}$. Последовательность q_l очевидно рекуррентна.

Для произвольного натурального S и $a\in Z$ обозначим через $V(a,S)$ множество $\{\{x_i\}\in \Omega_M ;\ x_s=a\}$. Из примитивности M следует, что для некоторого $c_2>0$ при любых $a\in Z$, $\varepsilon>0$ и q и при $l>|[c_2 \ln\varepsilon]|$ имеем:

$$|\omega_M^q(X_l^{a,b})|/|\omega_M^{q+l}(a)|=|\omega_M^q(Y_l^{a,b})|/|\omega_M^{q+l}(a)|>1-\varepsilon .$$

По определению ω_M каждому пути a_1a_2; $Ma_1a_2=1$ можно поставить в соответствие пару (a_2, n_1), где n_1 - номер символа a_1 в слове $\omega_M(a_2)$, каждому пути вида $a_1a_2a_3$ - тройку (a_3, n_2, n_1), где n_2 - номер a_2 в слове $\omega_M(a_3)$; n_1 - номер пути $a_1a_2a_3$ при перечислении, отвечающем упорядочению путей длины 2, заканчивающихся в a_3, равный номеру символа слова $\omega_M^2(a_3)$, совпадающего с a_1 и т.д. - т.е.мы пути длины n с концом в a_{n+1} приводим во взаимнооднозначное соответствие с символами слова $\omega_M^n(a_{n+1})$.

Рассматривая $X_l^{a,b}$ и $Y_l^{a,b}$ как подслова слова $\omega_M^l(a)$, замечаем, что совпадение символов, стоящих на одинаковых местах в словах $\omega_M^q(X_l^{a,b})$ и $\omega_M^q(Y_l^{a,b})$, означает, что для любого $l'>l+q$ и некоторого слова вида $z_1\dots z_{q+l+1}$; $M_{z_i z_{i+1}}=1$; $z_{q+l+1}=a$ для любого пути вида $x_1\dots x_{l'-l-q}\, z_1\dots z_{q+l+1}\, x_{l'+2}\dots\in\Omega_M$ его образ под действием T_{pq} тоже начинается с $x_1\dots x_{l'-l-q}\, z_1$. Соответствие между нашими словами вида $z_1\dots z_{q+l+1}$ и символами слова $\omega_M^q(X_l^{a,b})$ (всегда равными z_1) описано выше.

Теперь ясно, что для любого m найдутся $c_3, c_4>0$, $c_4>1$ и натуральное S_M такие, что для $c'\in\xi_m$, $a\in Z$ и $l>0$: $T^{p_l}(c'\cap V(a,l+S_m))\,\Delta\,(c'\cap V(a,l+S_m))<c_3c_4^l$. Поскольку $\bigcup_{a\in Z} V(a,l+S_m)=\Omega_M$, утверждение доказано.

Утверждение б)

Предположим, что T имеет дискретный спектр, и докажем, что в этом случае не может выполняться условие утвержде-

ния б). Пусть $\{U_j', e^{i2\pi\lambda_j}\}$ – перечень собственных функций и собственных значений, им соответствующих. Пусть P_1 и P_2 – пути, участвующие в определении символов c и d из пункта б). Тогда $N_m(P_1, P_2)$ – хорошая рекуррентная последовательность (п.3.4). Можно доказать ([8], аналог для подстановок в [6]), что для каждого j : $e^{2\pi i N_m(P_1,P_2)\lambda_j} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$. Из предположения о дискретности спектра следует, что для любого $f \in L^2(\Omega_M)$ имеет место сходимость по норме $U_T^{N_m(P_1,P_2)} f \to f$, где U_T – унитарный оператор, сопряженный с T.

Пусть $b_1 \dots b_\ell$; $c = b_1$; $b_\ell = a_\ell$ – образ P_1 при адическом отображении $b_1' \dots b_\ell'$; $d = b_1'$; $b_\ell' = a_\ell$ – образ P_2. Обозначим через R_m множество путей вида $x_1 \dots x_m$ $b_1 \dots b_\ell$ $x_{m+\ell+1} \dots \in \Omega_M$, через R_m' – множество путей вида $x_1 \dots x_m$ $b_1' \dots b_\ell'$ $x_{m+\ell+1} \dots \in \Omega_M$. Тогда $T^{N_m(P_1,P_2)} R_m = R_m'$; $\mu(R_m) > 0$; $\mu(R_m)$ не зависит от m (μ – инвариантная мера адического преобразования является одновременно инвариантной мерой с максимальной энтропией для сдвига в Ω_M).

Из условия б) легко следует существование константы $q > 0$ и символа $a' \in \mathbb{Z}$, таких, что при достаточно больших i в слове $\omega_M^{m_i}(c)$ долю символов, большую чем q, составляют символы, равные a', стоящие на таких местах, на которых в $\omega_M^{m_i}(d)$ стоят символы, отличные от a' (если необходимо, можно в качестве m_i взять ее подпоследовательность). Но поскольку $\mu(R_{m_i})$ – константа > 0, для характеристической функции χ множества $V(a',1)$ (п.а)) имеем $\| U_T^{N_{m_i}(P_1,P_2)} \chi - \chi \| = \sqrt{\mu(T^{N_{m_i}(P_1,P_2)} V(a',1) \Delta V(a',1))} >$

$$\sqrt{\mu(T^{N_{m_i}(P_1,P_2)} (V(a',1) \cap R_{m_i}) \Delta (V(a',1) \cap R_{m_i}))} > \text{const} > 0,$$

чем и доказано утверждение б).

Литература

I . Вершик А.М. Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения// ДАН СССР. 1981. Т.259. №3. С.526-529.

2 . Вершик А.М. Теорема о периодической марковской аппроксимации в эргодической теории // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1982. Т.115. С.72-82.

3 . Gottschalk W.H. Substitution minimal sets // Trans. Amer. Math. Society. 1963. Vol.109. P.467-491.

4 . Queffelec M. Substitutional Dynamical Systems - Spectral Analysis // Lecture Notes in Mathematics. 1987. Vol. 1294.

5 . Соломяк Б.М. Об одной динамической системе с дискретным спектром // УМН. 1986. Т.41. Вып.2. С.209-210.

6 . Host B. Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longeur variable // Erg. th. et dyn. Syst. 1986. Vol.6. P.4 P.529-540.

7 . Лившиц А.Н. О спектрах адических преобразований марковских компактов // УМН. 1987. Т.42. Вып.3. С.189-190.

8 . Лившиц А.Н. Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований // Математические заметки. 1988. Т.44. Вып.6.

9 . Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар Софус Ли. М.: Изд. ИЛ, 1962.

10. Goodman F., Harpe P. de la, Jones V. Coxeter - Dynkin Diagrams and Towers of Algebras: Prep. IHES, Mars, 1987, №.

11. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.

12. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

13. Градштейн И.М.,Рыжик И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

14. Фаддеев Д.К.,Соминский И.С. Сборник задач по высшей

алгебре. М.: Наука , 1977.
15. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
16. Martin J.C. Substitutional minimal flows // Amer. J. of Math. 1971. Vol. 93. N2. P. 503-526.
17. Martin J.C. Minimal flows, arising from substitutions of non-constant length // Mathematical Systems Theory. March. 1973. Vol. 7. N1. P. 73-82.
18. Kamae T. A topological invariant of substitutional minimal sets // Journ. Math. Soc. of Japan. 1972. Vol. 24. N2. P. 285-305.
19. Dekking F.M., Keane M. Mixing properties of substitutions // ZFW. 1978. Vol. 42. P. 23-33.

Печатается в соответствии с решением редколлегии журнала "Вестник ЛГУ. Сер. математика, механика, астрономия" от 21 апреля 1988 г.

В печать 22.09 П

Тир. Цена 2 руб. 60 коп. Зак. 32792

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403