В. А. Даугавет, Н. А. Таныгина

БЫСТРОТА СХОДИМОСТИ МЕТОДА ВЫРАВНИВАНИЯ В РАВНОМЕРНОЙ Σ-АППРОКСИМАЦИИ[1]

1. Под Σ-аппроксимацией понимается аппроксимация функции двух переменных $f(u,v)$ суммой функций одной переменной $x(u)+y(v)$. В данной статье рассматривается дискретный вариант такой аппроксимации, который описывается следующим образом. Пусть $F[M,N]$ приближаемая матрица (таблица функции от двух переменных), где $M=\{1,2,\ldots,m\}$, $N=\{1,2,\ldots,n\}$, а $x[M]$ и $y[N]$ искомые векторы (таблицы функций одной переменной). Равномерная дискретная задача Σ-аппроксимации имеет вид

$$\varphi(x,y) := \max_{i\in M, j\in N} \mid F[i,j]-x[i]-y[j] \mid \to \inf_{x[M],y[N]}. \qquad (1)$$

Эта задача сводится к задаче линейного программирования, но применение традиционного симплекс-метода для ее решения не эффективно. Для этой задачи обычно используется итеративный метод *выравнивания* (см. [1, 2]). В данной работе рассматривается вопрос о быстроте сходимости метода выравнивания. Вводится определение альтернанса для матрицы F и показывается, что метод выравнивания сходится с быстротой геометрической прогрессии со знаменателем, зависящим от длины альтернанса.

2. Приведем необходимые и достаточные признаки решения для задачи (1).
Обозначим $\mathcal{P} := \{[i,j] \,\big|\, i\in M,\, j\in N\}$.

Определение 1. *Ступенчатым циклом* C_q называется множество $2q$ различных пар индексов из $\mathcal{P}$ следующего вида

$$C_q = \big\{[i_1,j_1],[i_1,j_2],[i_2,j_2],[i_2,j_3],\ldots,[i_q,j_q],[i_q,j_1]\big\},$$

где $q\in[2,\min\{m,n\}]$. Число q называется длиной ступенчатого цикла.

Определение 2. Пара векторов $\{x,y\}$ обладает *альтернансом* относительно матрицы $F[M,N]$, если в $\mathcal{P}$ существует ступенчатый цикл C_q, на котором при всех $k\in 1:q$ выполняются равенства:

$$\begin{aligned} F[i_k,j_k]-x[i_k]-y[j_k] &= \mu, \\ F[i_k,j_{k+1}]-x[i_k]-y[j_{k+1}] &= -\mu, \\ j_{q+1}=j_1, \quad |\mu| &= \varphi(x,y). \end{aligned}$$

На рис. 1 приведена схема расположения альтернансных точек при $q=4$.

	j_1	j_2	j_3	j_4
i_1	μ	$-\mu$		
i_2		μ	$-\mu$	
i_3			μ	$-\mu$
i_4	$-\mu$			μ

рис. 1.

Известный признак оптимальности для непрерывной задачи Σ-аппроксимации (см. [3]) в дискретном случае формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пара векторов* $\{x_*,y_*\}$ *является решением задачи* (1) *тогда и только тогда, когда она обладает альтернансом.*

Заметим, что в дискретном случае доказательство этой теоремы становится очень простым. Действительно, задача (1) сводится к задаче линейного программирования, и результаты теоремы легко вытекают из известных теорем двойственности.

3. Для заданной матрицы $F[M,N]$ возьмем произвольный ступенчатый цикл $C_q = \big\{[i_1,j_1],[i_1,j_2],\ldots,[i_q,j_q],[i_q,j_1]\big\}$ и обозначим

$$\rho(C_q) := \frac{1}{2q}\sum_{k\in 1:q}\big(F[i_k,j_k]-F[i_k,j_{k+1}]\big).$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 01-0100231).

Решим задачу аппроксимации только на этом ступенчатом цикле. Положим

$$\varphi_c(u,v) := \max_{k\in 1:q}\left\{\left|\, F[i_k,j_k]-u[k]-v[k]\,\right|, \left|\, F[i_k,j_{k+1}]-u[k]-v[k+1]\,\right|\right\},$$

где $j_{q+1}=j_1$, $v[q+1]=v[1]$, и рассмотрим задачу

$$\varphi_c(u,v)\to \min_{u,v\in\mathbb{R}^q}.$$

Она сводится к следующей задаче линейного программирования

$$g\to\min,$$

$$\begin{array}{ll} g+u[k]+v[k] & \geq F[i_k,j_k], \\ g-u[k]-v[k] & \geq -F[i_k,j_k], \\ g+u[k]+v[k+1] & \geq F[i_k,j_{k+1}], \\ g-u[k]-v[k+1] & \geq -F[i_k,j_{k+1}] \\ & \forall\ k\in 1:q. \end{array} \tag{2}$$

Покажем, что

$$\min_{u,v}\varphi_c(u,v)=|\rho(C_q)|. \tag{3}$$

Действительно, сложив первое неравенство с последним и просуммировав по $k\in 1:q$, получим неравенство $g\geq\rho(C_q)$. Аналогичным образом из второго и третьего неравенства получаем $g\geq-\rho(C_q)$. Значит, $g\geq|\rho(C_q)|$. Подберем теперь u,v, на которых эта оценка реализуется. Возьмем произвольное число γ и положим $v[1]=\gamma$. Остальные компоненты v и u найдем из следующих рекуррентных соотношений для $k=1,2,...,q$:

$$u[k]=F[i_k,j_k]-v[k]-\rho(C_q),\quad v[k+1]=F[i_k,j_{k+1}]-u[k]+\rho(C_q).$$

Легко видеть, что полученная пара векторов $u,v\in\mathbb{R}^q$ является планом задачи (2) и значение целевой функции на этом плане равно $|\rho(C_q)|$. Значит, равенство (3) доказано.

Замечание. Возьмем произвольные векторы $x[M]$ и $y[N]$ и рассмотрим матрицу $H[i,j]=F[i,j]-x[i]-y[j]$. Для любого ступенчатого цикла C_q справедливо равенство

$$\frac{1}{2q}\sum_{k\in 1:q}\left(H[i_k,j_k]-H[i_k,j_{k+1}]\right)=\rho(C_q). \tag{4}$$

Действительно, при вычислении левой суммы все $x[i_k]$ и $y[j_k]$ сократятся и останется только $\rho(C_q)$.

Вернемся к задаче (1). В силу (3) для любого ступенчатого цикла C_q и любой пары векторов $\{x[M],y[N]\}$ справедливо неравенство $\varphi(x,y)\geq|\rho(C_q)|$. Значит, $\mu_*:=\inf_{x,y}\varphi(x,y)\geq$ $\geq|\rho(C_q)|$. Так как оптимальная пара векторов задачи (1) обладает альтернансом, то

$$\mu_*=\max_{C_q}\frac{1}{2q}\left|\sum_{k=1}^{q}\left(F[i_k,j_k]-F[i_k,j_{k+1}]\right)\right|.$$

Пользуясь (4) легко показать, что если $|\rho(C_q)|=\mu_*$, то ступенчатый цикл C_q является альтернансом для любого решения $\{x,y\}$ задачи (1), поэтому далее будем называть его просто *альтернансом* матрицы F. Нетрудно построить матрицы F, у которых несколько альтернансов, при этом они могут и пересекаться. Тем не менее, практически часто встречаются матрицы F, которые имеют единственный альтернанс с $q=2$.

4. Метод выравнивания в дискретной равномерной Σ-аппроксимации заключается в следующем.

Выберем $x_0[M]$ и затем на каждом p-м шаге ($p=1,2,\dots$) производим следующие операции. Зафиксировав вектор $x_{p-1}[M]$, построим "наилучший"для него вектор $y_p[N]$, решив задачу

$$\varphi(x_{p-1},y):=\max_{[i,j]\in\mathcal{P}}|F[i,j]-x_{p-1}[i]-y[j]|\to\inf_{y[N]}. \tag{5}$$

Затем, зафиксировав вектор y_p, построим "наилучший"для него вектор $x_p[M]$, решив задачу

$$\varphi(x, y_p) = \max_{[i,j]\in\mathcal{P}} |F[i,j] - x[i] - y_p[j]| \to \inf_{x[M]} . \qquad (6)$$

Процесс закончится, когда x_p совпадет с x_{p-1}.

Опишем этот процесс подробнее. Ясно, что задача (5) распадается на n самостоятельных задач при каждом $j \in N$:

$$\max_{i\in M} |F[i,j] - x_{p-1}[i] - t| \to \inf_t .$$

Очевидно, что решение j-й задачи, которое обозначим $y_p[j]$, находится по формуле

$$y_p[j] = \frac{1}{2}\left(\max_{i\in M}(F[i,j] - x_{p-1}[i]) + \min_{i\in M}(F[i,j] - x_{p-1}[i])\right) . \qquad (7)$$

Введем в рассмотрение матрицу невязок $H_{p-1,p-1}[M,N]$ с компонентами $H_{p-1,p-1}[i,j] = F[i,j] - x_{p-1}[i] - y_{p-1}[j]$ и вектор $\Delta\, y_p$ с компонентами $\Delta\, y_p[j] := y_p[j] - y_{p-1}[j]$. Тогда из (7) следует, что

$$\Delta\, y_p[j] = \frac{1}{2}\Big(\max_{i\in M} H_{p-1,p-1}[i,j] + \min_{i\in M} H_{p-1,p-1}[i,j]\Big),$$

а новая матрица $H_{p-1,p}$ получается из $H_{p-1,p-1}$ вычитанием из каждого элемента j-го столбца одного и того же числа $\Delta\, y_p[j]$.

Аналогично решается задача (6), т. е. находится вектор $\Delta x_p := x_p - x_{p-1}$, и строится новая матрица $H_{p,p}$. Таким образом, p-й шаг метода выравнивания (построение x_p по известному x_{p-1}) заключается в построении следующих векторов и матриц:

$$\Delta\, y_p[j] = \tfrac{1}{2}\Big(\max_{i\in M} H_{p-1,p-1}[i,j] + \min_{i\in M} H_{p-1,p-1}[i,j]\Big),\ j \in N;$$
$$H_{p-1,p}[i,j] = H_{p-1,p-1}[i,j] - \Delta\, y_p[j], \quad i \in M, \quad j \in N;$$

$$\Delta\, x_p[i] = \tfrac{1}{2}\Big(\max_{j\in N} H_{p-1,p}[i,j] + \min_{j\in N} H_{p-1,p}[i,j]\Big),\ i \in M;$$
$$H_{p,p}[i,j] = H_{p-1,p}[i,j] - \Delta\, x_p[i],\ i \in M,\ j \in N.$$

Вычисления заканчиваются, когда вектор $\Delta\, x_p[M]$ станет нулевым.

Ясно, что $\varphi(x_p, y_p) \le \varphi(x_{p-1}, y_p) \le \varphi(x_{p-1}, y_{p-1})$, поэтому при $p \to \infty$ имеем $\varphi(x_p, y_p) \to \mu_*$. В работах [1, 2] доказано, что

$$\mu_* = \min_{x,y} \varphi(x, y).$$

Значит, всякая предельная пара последовательности $\{x_p, y_p\}$ является решением задачи (1).

Перейдем к основному результату данной работы — установлению быстроты сходимости метода выравнивания. Предварительно докажем некоторые вспомогательные утверждения.

5. Если процесс выравнивания сходится, то согласно алгоритму в пределе получим матрицу невязок H_* с компонентами $H_*[i,j] = F[i,j] - x_*[i] - y_*[j]$, которая обладает свойством

$$\max_{j\in N} H_*[i,j] = -\min_{j\in N} H_*[i,j], \quad i \in M;$$
$$\max_{i\in M} H_*[i,j] = -\min_{i\in M} H_*[i,j], \quad j \in N.$$

Матрицу невязок H_* с таким свойством назовем *выравненной.*

Теорема 2. *Пусть исходная матрица F имеет единственный альтернанс и решение задачи* (1) $\{x_*, y_*\}$ *таково, что матрица $H_*[i,j] = F[i,j] - x_*[i] - y_*[j]$ выравнена. Тогда каждая пара индексов $[i,j]$, на которой $|H_*[i,j]| = \varphi(x_*, y_*)$, принадлежит альтернансу.*

Доказательство. Введем обозначения

$$C_q^* = \big\{[i_1, j_1], [i_1, j_2], \ldots, [i_q, j_q], [i_q, j_1]\big\}\ -\ \text{альтернанс},$$
$$c_i^* = \big\{i_1, i_2, ..., i_q\big\}, \quad c_j^* = \big\{j_1, j_2, ..., j_q\big\}.$$

Пусть для определенности $H_*[i_k, j_k] = \varphi_*$, $k = 1:q$, что соответствует рис. 1 с $\mu = \varphi_*$. Допустим, что $|H_*[r_1, s_1]| = \varphi_*$ и пара $[r_1, s_1]$ не принадлежит C_q^*. Рассмотрим четыре случая.

а) $r_1 = i_p \in c_i^*$, $s_1 = j_l \in c_j^*$. Если $H_*[r_1, s_1] = -\varphi_*$, то цепочка

$$[i_p, j_l], [i_l, j_l], [i_l, j_{l+1}], ..., [i_p, j_p]$$

образует другой альтернанс, что противоречит предположению теоремы. Аналогичным образом можно построить другой альтернанс, если $H_*[r_1, s_1] = \varphi_*$.

б) $r_1 = i_p \in c_i^*$, $s_1 \notin c_j^*$ (или $r_1 \notin c_i^*$, $s_1 = j_l \in c_j^*$). Не умаляя общности считаем, что $H_*[r_1, s_1] = \varphi_*$. Так как матрица H_* выравнена, то найдется $H_*[r_2, s_1] = -\varphi_*$. Далее, если $r_2 \notin c_i^*$, то находим $H_*[r_2, s_2] = \varphi_*$ и т.д. Таким образом строим цепочку из точек, не принадлежащих C_q^*, пока это возможно. Если цепочка замкнулась, то получился новый альтернанс, что недопустимо. Если цепочка сама не замкнулась, а вышла на точку из C_q^*, то, как в случае а), ее можно замкнуть точками из C_q^* и снова получить другой альтернанс.

в) $r_1 \notin c_i^*$, $s_1 \notin c_j^*$. Опять сначала строим цепочку из точек, не принадлежащих C_q^*, пока это возможно. Либо она сама замкнется, либо выйдет своими концами в C_q^*. В обоих случаях образуется новый альтернанс, что противоречит предположению теоремы. ■

6. Исследовать скорость сходимости будем для матрицы F, которая имеет **единственный** альтернанс

$$C_q = \{[i_1, j_1], [i_1, j_2], \ldots, [i_q, j_q], [i_q, j_1]\},$$

и для которой $\inf\limits_{x,y} \varphi(x, y) = \mu_* > 0$. Для определенности будем считать, что $H_*[i_k, j_k] = \mu_*$ и $H_*[i_k, j_{k+1}] = -\mu_*$ при всех $k \in 1:q$ (см. рис. 1), так что $\rho(C_q) = \mu_*$.

Пусть для такой матрицы F метод выравнивания сходится к паре векторов $\{x_*, y_*\}$ с какого-либо начального вектора x_0. Согласно алгоритму предельная матрица невязок H_* выравнена и по теореме 2 у матрицы H_* нет других компонент максимального уклонения, кроме тех, которые входят в C_q.

Пусть пара $\{x_p, y_p\}$, построенная методом выравнивания, настолько близка к предельной паре $\{x_*, y_*\}$, что для нее и для пар на всех следующих итерациях выполнено неравенство:

$$\begin{gathered} \max_{[i,j] \in \mathcal{P} \setminus C_q} |H_{p,p}[i,j]| < \min_{[i,j] \in C_q} |H_{p,p}[i,j]|, \\ H_{p,p}[i_k, j_k] > 0, \quad H_{p,p}[i_k, j_{k+1}] < 0, \ k \in 1:q. \end{gathered} \tag{8}$$

Установим скорость сходимости пар $\{x_p, y_p\}$ к предельной паре $\{x_*, y_*\}$. Напомним, что на каждой итерации метода матрица невязок $H_{p,p}$ выравнена по строкам, матрица $H_{p,p+1}$ выравнена по столбцам. Введем в рассмотрение q-мерные векторы $\Delta^{(p)}$ и $\delta^{(p)}$ с компонентами

$$\begin{gathered} \Delta^{(p)}[k] := H_{p,p}[i_k, j_k] - \mu_* = -H_{p,p}[i_k, j_{k+1}] - \mu_*, \\ \delta^{(p)}[k] := H_{p,p+1}[i_k, j_k] - \mu_* = -H_{p,p+1}[i_{k-1}, j_k] - \mu_*, \\ k \in 1:q, \quad i_0 = i_q, \ j_{q+1} = j_1. \end{gathered}$$

Быстрота сходимости рассматриваемого процесса зависит от q — длины альтернанса ($q \geq 2$), и определяется следующей оценкой.

Теорема 3. *Справедливы неравенства*

$$\|\Delta^{(p+1)}\|_\infty \leq \|\delta^{(p)}\|_\infty \leq \|\Delta^{(p)}\|_\infty.$$

Более того, полагая $\xi(q) = (1 - \frac{q}{2^{q-1}})$, *имеем*

$$\begin{aligned} \|\Delta^{(p+r)}\|_\infty &\leq \xi(q) \cdot \|\Delta^{(p)}\|_\infty \quad \textit{для нечетного } q = 2r+1, \\ \|\Delta^{(p+r)}\|_\infty &\leq \xi(q) \cdot \|\delta^{(p)}\|_\infty \quad \textit{для четного } q = 2r. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Согласно алгоритму

$$H_{p,p+1}[i,j] = H_{p,p}[i,j] - \frac{1}{2}\Big(\max_{l \in M} H_{p,p}[l,j] + \min_{l \in M} H_{p,p}[l,j]\Big).$$

В силу (8) минимальное и максимальное значения $H_{p,p}[i,j]$ в столбце j_k известны. Пользуясь выравненностью матрицы $H_{p,p}$ по строкам, имеем:

$$\min_{l\in M} H_{p,p}[l,j_k] = H_{p,p}[i_{k-1},j_k] = -H_{p,p}[i_{k-1},j_{k-1}],$$
$$\max_{l\in M} H_{p,p}[l,j_k] = H_{p,p}[i_k,j_k] = -H_{p,p}[i_k,j_{k+1}].$$

Значит, на альтернансных индексах ($k \in 1:q$)

$$H_{p,p+1}[i_k,j_k] = \tfrac{1}{2}\Big(H_{p,p}[i_k,j_k] + H_{p,p}[i_{k-1},j_{k-1}]\Big),$$
$$-H_{p,p+1}[i_k,j_{k+1}] = \tfrac{1}{2}\Big(H_{p,p}[i_k,j_k] + H_{p,p}[i_{k+1},j_{k+1}]\Big) =$$
$$= H_{p,p+1}[i_{k+1},j_{k+1}].$$

Вычитая из обеих частей первого равенства μ_*, получим

$$\delta^{(p)}[k] = \frac{1}{2}(\Delta^{(p)}[k-1] + \Delta^{(p)}[k]), \quad k \in 1:q. \tag{10}$$

Здесь $\Delta^{(p)}[0] = \Delta(p)[q]$. Далее, по алгоритму

$$H_{p+1,p+1}[i,j] = H_{p,p+1}[i,j] - \frac{1}{2}\Big(\max_{l\in N} H_{p,p+1}[i,l] + \min_{l\in N} H_{p,p+1}[i,l]\Big).$$

Поступая аналогичным образом с учетом, что матрица $H_{p,p+1}$ выравнена по столбцам, получим

$$\Delta^{(p+1)}[k] = \frac{1}{2}(\delta^{(p)}[k+1] + \delta^{(p)}[k]), \quad k \in 1:q. \tag{11}$$

Здесь $\delta^{(p)}[q+1] = \delta^{(p)}[1]$. Из (11) и (10) теперь следует первая оценка теоремы:

$$\|\Delta^{(p+1)}\|_\infty \le \|\delta^{(p)}\|_\infty \le \|\Delta^{(p)}\|_\infty.$$

Далее, подставляя (10) в (11), получим

$$\Delta^{(p+1)}[k] = \frac{1}{4}(\Delta^{(p)}[k-1] + 2\Delta^{(p)}[k] + \Delta^{(p)}[k+1]), \quad k \in 1:q. \tag{12}$$

Аналогичным образом, вычисляя матрицу $H_{p+1,p+2}$, получим

$$\delta^{(p+1)}[k] = \frac{1}{4}(\delta^{(p)}[k-1] + 2\delta^{(p)}[k] + \delta^{(p)}[k+1]), \quad k \in 1:q. \tag{13}$$

Напомним (см. (4)), что на всех итерациях для матриц $H_{p,p}$ и $H_{p,p+1}$ выполнено равенство

$$\frac{1}{2q}\sum_{k\in 1:q}(H_{p,p}[i_k,j_k] - H_{p,p}[i_k,j_{k+1}]) = \rho(C_q) = \mu_*,$$

откуда при любых p имеем

$$\sum_{k\in 1:q}\Delta^{(p)}[k] = 0, \quad \sum_{k\in 1:q}\delta^{(p)}[k] = 0. \tag{14}$$

Чтобы воспользоваться этими равенствами, найдем выражение $\Delta^{(p+r)}[k]$ через $\Delta^{(p)}[k]$, подбирая r таким, чтобы в выражении для $\Delta^{(p+r)}[k]$ содержалось ровно q различных компонент вектора $\Delta^{(p)}$ или $\delta^{(p)}$. Рассмотрим два случая.

Пусть q — нечетное, $q = 2r+1$. Применим формулу (12) r раз к $\Delta^{(p+r)}[k]$. Каждое i-е применение формулы добавляет две различные новые компоненты вектора $\Delta^{(p+r-i)}$ и уменьшает общий множитель в четыре раза. Значит, за r шагов получим

$$\Delta^{(p+r)}[k] = \frac{1}{2^{2r}}\sum_{i=1}^{q} a_i^{(r)}\Delta^{(p)}[i].$$

Нетрудно заметить, что $\sum_{i=1}^{q} a_i^{(r)} = 2^{2r}$. Пользуясь формулой (14), получим

$$\Big|\Delta^{(p+r)}[k]\Big| = \frac{1}{2^{2r}}\Big|\sum_{i=1}^{q}(a_i^{(r)} - 1)\Delta^{(p)}[i]\Big| \le \xi(q)\|\Delta^{(p)}\|_\infty, \quad k \in 1:q,$$

откуда следует требуемая оценка для нечетного q.

Пусть q — четное, $q = 2r$. Найдем выражение $\Delta^{(p+r)}[k]$ через $\delta^{(p)}[k]$. Воспользуемся один раз формулой (11), а затем $r-1$ раз формулой (13). Тогда получим

$$\Delta^{(p+r)}[k] = \frac{1}{2^{2r-1}} \sum_{i=1}^{q} b_i^{(r)} \delta^{(p)}[i].$$

Так как $\sum_{i=1}^{q} b_i^{(r)} = 2^{2r-1}$, то в силу (14) получим

$$\left|\Delta^{(p+r)}[k]\right| = \frac{1}{2^{2r-1}} \left| \sum_{i=1}^{q} (b_i^{(r)} - 1)\delta^{(p)}[i] \right| \leq \xi(q)\|\delta^{(p)}\|_\infty, \quad k \in 1:q,$$

откуда следует оценка для четного q. ■

Следствие. *При $q = 2$ метод выравнивания конечен. При $q = 3$ оценка (9) точна. При $q = 4$ справедливо равенство*

$$\|\Delta^{(p+2)}\|_\infty = \frac{1}{2}\|\Delta^{(p+1)}\|_\infty.$$

Доказательство. Очевидно, что $\xi(q) = 0$ при $q = 2$, так что $\Delta^{(p+1)} = \mathbb{O}$.

При $q = 3$ имеем $\xi(3) = \frac{1}{4}$, а из формулы (12) для всех $k \in 1:3$ следует

$$\Delta^{(p+1)}[k] = \frac{1}{4} \cdot \Delta^{(p)}[k] + \frac{1}{4}(\Delta^{(p)}[k-1] + \Delta^{(p)}[k] + \Delta^{(p)}[k+1]).$$

Теперь в силу (14) получаем $\Delta^{(p+1)}[k] = \frac{1}{4}\Delta^{(p)}[k]$. Аналогичная формула справедлива и для $\delta^{(p+1)}[k]$.

При $q = 4$ применим к $\Delta^{(p+2)}[k]$ сначала формулу (11), потом (13), а затем воспользуемся (14). Тогда получим

$$\Delta^{(p+2)}[k] = \frac{1}{4}(\delta^{(p)}[k+1] + \delta^{(p)}[k]).$$

Теперь из (11) следует равенство $\Delta^{(p+2)}[k] = \frac{1}{2}\Delta^{(p+1)}[k]$ для всех $k \in 1:q$. ■

Таким образом, если матрица F обладает единственным альтернансом, то метод выравнивания, описанный в п. 4, сходится с быстротой геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $\xi(q) = (1 - \frac{q}{2^{q-1}})$, где q — длина альтернанса ($q \geq 2$).

Литература

1. *Diliberto S. P. and Straus E. G.* On the approximation of a function of several variables by the sum of functions of fewer variables // Pacif. J. Mathem. 1951, v.1, p.195-210.

2. *Аникеич А. А., Грибов А. Б.* Приближение элементов матрицы суммой соответствующих компонент двух векторов// Сб. Исследование операций и статистическое моделирование. Изд-во ЛГУ, вып.1, 1972, с. 3 - 9.

3. *Хавинсон С. Я.* Чебышевская теорема для приближения функции двух переменных суммами// Изв. АН СССР, сер. мат., т.33, N 3.1969 г. с. 650-666.