О ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ВИЛЕНКИНА–КРЕСТЕНСОНА[1]

Машарский С. М., Цветков К. Ю.

В статье представлены результаты обобщения известного соотношения для корреляционных функций сложного дискретного сигнала. Приведены доказательства соответствующих утверждений. В базисе Виленкина–Крестенсона построены наборы дельта-коррелированных сложных дискретных сигналов, которые могут быть использованы в широкополосных системах связи с кодовым множественным доступом.

ON CROSS–CORRELATION FUNCTION OF DISCRETE SIGNALS IN VILENKIN–CHRESTENSON BASIS

S. M. Masharsky and K. Yu. Tzvetkov

This paper presents the results of generalization of well-known relation for correlation functions of complex discrete signals. The proofs of corresponding statements are given. The sets of delta-correlated complex discrete signals in Vilenkin–Chrestenson basis are constructed. This sets of signals can be used in spread spectrum communications systems with code division multiple access.

Введение

Для широкополосных систем передачи информации (СПИ) с кодовым множественным доступом принципиальными вопросами являются оценивание и управление уровнем взаимных помех [1–3], а также выбор типа сложных сигналов, в частности, по виду их корреляционных функций [1] и ряду других свойств [4–6].

В работах [1–3] установлены соотношения между авто- и взаимнокорреляционными функциями, а также количеством сложных сигналов в ансамбле. Результаты работ [1–3] применимы к СПИ с асинхронным и синхронным кодовым множественным доступом и ориентированы на базис Фурье с естественным для этого базиса оператором циклического сдвига [7].

На периодах $N = n^s$, $n \geq 2$, $s \geq 1$, существует дискретный базис Виленкина–Крестенсона (В-К). Согласно [7], на указанных периодах этот базис является обобщением базиса Фурье (случай $s = 1$) и базиса Уолша (случай $n = 2$). Естественным для базиса В-К оператором сдвига является n-ичный сдвиг. Это обстоятельство позволяет ввести в базисе В-К понятия и определения теории сложных дискретных сигналов, аналогичные существующим в базисе Фурье [7, 8].

В данной статье с использованием понятия n-ичной корреляции получено обобщение границы Сидельникова–Сарвате для корреляционных функций сложного дискретного сигнала. В качестве примера построены ансамбли бинарных дельта-n-коррелированных сигналов с основанием $n = 2$ на периодах $N = 2^{2s}$, $s \geq 2$ (как извест-

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования РФ (грант № PD02-1.1-204).

но [5], дельта-коррелированных в традиционном смысле бинарных сигналов при $N > 4$ не существует). Результаты, полученные для базиса В-К, ориентированы в первую очередь на синхронные СПИ с кодовым множественным доступом [7, 10].

Предварительные сведения

Следующие стандартные обозначения используются далее постоянно: Z — множество всех целых чисел; $m : n$ — множество целых чисел $\{m, m + 1, \dots n\}$; $\lfloor\beta\rfloor$ — целая часть вещественного числа β; $\langle k\rangle_n := k - \lfloor k / n\rfloor n$ — остаток от деления целого числа k на натуральное n.

Обозначим через C_N множество комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента $x = x(j)$, $j \in Z$. Элементы этого множества будем называть сигналами. В C_N обычным образом вводятся операции умножения на комплексное число и сложения двух сигналов

$$y = c\cdot x \Leftrightarrow y(j) = c\cdot x(j),\ \ j \in Z;$$

$$y = x_1 + x_2 \Leftrightarrow y(j) = x_1(j) + x_2(j),\ \ j \in Z.$$

При этом C_N становится линейной пространством.

Введем стандартным образом скалярное произведение и норму:

$$< x, y >= \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\overline{y(j)},\ \ \| x \| =< x, x >^{1/2}.$$

Обозначим через $\mathcal{F}_N : C_N \to C_N$ дискретное преобразование Фурье (ДПФ). По определению сигнал $X = \mathcal{F}_N\,(x)$ имеет компоненты

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\omega_N^{-kj},\ \ k \in Z,$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i /N)$ — корень N-й степени из единицы.

Нам потребуется единичный N-периодический импульс — сигнал $\delta_N\,(j)$, равный единице, когда j делится на N и равный нулю при остальных $j \in Z$. Очевидно, что $\delta_N\,(-j) = \delta_N\,(j)$.

Сигналам x и y сопоставим функцию взаимной корреляции R_{xy}:

$$R_{xy}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(j+k)\overline{y(k)},\ \ j \in Z.$$

Функция R_{xx} называется автокорреляционной функцией сигнала x. Отметим, что $R_{xx}(0) = \|x\|^2$.

Сигнал x называется дельта-коррелированным, если $R_{xx}(j) = \|x\|^2 \delta_N(j)$. Сигналы x и y называются некоррелированными, если $R_{xy}(j) \equiv 0$.

Для корреляционных функций сложных дискретных сигналов x, y, u, v справедливы следующие соотношения [1–6]:

$$\sum_{j=0}^{N-1} R_{xu}(j+l)\overline{R_{yv}(j)} = \sum_{j=0}^{N-1} R_{xy}(j+l)\overline{R_{uv}(j)},\ \ l \in Z, \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} R_{xy}(j+l)\overline{R_{xy}(j)} = \sum_{j=0}^{N-1} R_{xx}(j+l)\overline{R_{yy}(j)},\ \ l \in Z, \tag{2}$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} | R_{xy}(j) |^2 = \sum_{j=0}^{N-1} R_{xx}(j) \overline{R_{yy}(j)}. \tag{3}$$

Формула (3) непосредственно используется при выводе границы Сидельникова–Сарвате [1, 2]. Пусть P — совокупность (ансамбль) из m сигналов, заданных на периоде длины N. Будем считать, что $\|x\|^2 = N$ для всех $x \in P$. Положим

$$R_c = \max\{ | R_{xy}(j) |:\ x, y \in P,\ x \neq y,\ j \in 0 : N-1\},$$

$$R_a = \max\{ | R_{xx}(j) |:\ x \in P,\ j \in 1 : N-1\}.$$

Граница Сидельникова–Сарвате имеет вид

$$\frac{R_c^2}{N} + \frac{N-1}{N(m-1)} \frac{R_a^2}{N} \geq 1. \tag{4}$$

Введя обозначение $R_{\max} = \max\{R_c, R_a\}$, получим неравенство Велча [3]:

$$\frac{R_{\max}^2}{N} \geq \frac{N(m-1)}{Nm-1}, \tag{5}$$

Основные соотношения для корреляционных функций сложных дискретных сигналов в базисе Виленкина–Крестнсона

Получим аналогичные (1)–(5) соотношения в базисе В-К.

В дальнейшем считаем, что $N = n^s$, $n,s \geq 2$. Для числа k из множества $0 : N-1$ запись в n-ичном коде $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots, k_0)_n$ означает, что

$$k = k_{s-1} n^{s-1} + k_{s-2} n^{s-2} + \ldots + k_0.$$

Здесь $k_\alpha \in 0 : n-1$ при всех $\alpha \in 0 : s-1$. Возьмем еще $j \in 0 : N-1$, $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_n$ и положим

$$\{k, j\}_s = \sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha j_\alpha.$$

Сигналы

$$v_k(j) = \omega_n^{\{k,j\}_s}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{6}$$

называются дискретными функциями Виленкина–Крестенсона [7, 8]. Формулой (6) сигналы $v_k(j)$ определены на основном периоде $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Далее они продолжаются N-периодически на все целые $j \in Z$.

Возьмем $k = (k_{s-1}, \ldots, k_0)_n$, $j = (j_{s-1}, \ldots, j_0)_n$ и положим $p_\alpha = \langle k_\alpha + j_\alpha \rangle_n$, $m_\alpha = \langle k_\alpha - j_\alpha \rangle_n$, $\alpha \in 0 : s-1$. Число $p = (p_{s-1}, \ldots, p_0)_n$ получено в результате поразрядного сложения по модулю n чисел k и j, представленных своими n-ичными кодами. Этот факт записывается в виде $p = k \underset{n}{\oplus} j$. Число $m = (m_{s-1}, \ldots, m_0)_n$ получено в результате поразрядного вычитания по модулю n чисел k и j. Это записывается так: $m = k \underset{n}{-} j$. Нетрудно убедиться, что операции поразрядной арифметики обладают теми же групповыми свойствами, что и обычные операции сложения и вычитания.

Сигналам $x, y \in C_N$ сопоставим функцию взаимной n-корреляции:

$$R_{xy}^{(n)}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(j \underset{n}{\oplus} k) \overline{y(k)}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{7}$$

Функцию $R_{xx}^{(n)}$ назовем функцией *n*-автокорреляции сигнала *x*. Отметим, что $R_{xx}^{(n)}(0) = R_{xx}(0) = \|x\|^2$.

Сигнал *x* назовем дельта-*n*-коррелированным, если $R_{xx}^{(n)}(j) = \|x\|^2 \delta_N(j)$. Сигналы *x* и *y* назовем *n*-некоррелированными, если $R_{xy}^{(n)}(j) \equiv 0$.

Л е м м а. Пусть $l \in 0 : N - 1$. Для сигналов $x, y, u, v \in C_N$ справедливо утверждение

$$\sum_{j=0}^{N-1} R_{xy}^{(n)}(j \underset{n}{\oplus} l)\overline{R_{uv}^{(n)}(j)} = \sum_{j=0}^{N-1} R_{xu}^{(n)}(j \underset{n}{\oplus} l)\overline{R_{yv}^{(n)}(j)}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем левую часть равенства (8) согласно определению (7):

$$\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} x(j \underset{n}{\oplus} l \underset{n}{\oplus} k)\overline{y(k)} \sum_{t=0}^{N-1} \overline{u(j \underset{n}{\oplus} t)} v(t) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{t=0}^{N-1} \overline{y(k)} v(t) \sum_{j=0}^{N-1} x(l \underset{n}{\oplus} k \underset{n}{\oplus} j)\overline{u(j \underset{n}{\oplus} t)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{t=0}^{N-1} v(t)\overline{y(k)} \sum_{j'=0}^{N-1} x(l \underset{n}{\oplus} k \underset{n}{\oplus} j' \underset{n}{-} t)\overline{u(j')} = \sum_{t=0}^{N-1} v(t) \sum_{k=0}^{N-1} \overline{y(k)} R_{xu}^{(n)}(l \underset{n}{\oplus} k \underset{n}{-} t) =$$

$$= \sum_{t=0}^{N-1} v(t) \sum_{k'=0}^{N-1} \overline{y(k' \underset{n}{\oplus} t)} R_{xu}^{(n)}(l \underset{n}{\oplus} k') = \sum_{j=0}^{N-1} R_{xu}^{(n)}(l \underset{n}{\oplus} j) \sum_{t=0}^{N-1} \overline{y(j \underset{n}{\oplus} t)} v(t) = \sum_{j=0}^{N-1} R_{xu}^{(n)}(j \underset{n}{\oplus} l)\overline{R_{yv}^{n}(l)}.$$

Мы воспользовались тем, что отображения $j \to j \underset{n}{-} t$ и $k \to k \underset{n}{\oplus} t$ являются перестановками множества $\{0, 1, \ldots, N - 1\}$. Лемма доказана. ▲

С л е д с т в и е. Положив в (8) $u = x$ и $v = y$, получим

$$\sum_{j=0}^{N-1} R_{xy}^{(n)}(j \underset{n}{\oplus} l)\overline{R_{xy}^{(n)}(j)} = \sum_{j=0}^{N-1} R_{xx}^{(n)}(j \underset{n}{\oplus} l)\overline{R_{yy}^{(n)}(j)}. \tag{9}$$

В частности, при $l = 0$,

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left|R_{xy}^{(n)}(j)\right|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} R_{xx}^{(n)}(j)\overline{R_{yy}^{(n)}(j)}. \tag{10}$$

Докажем теперь соотношение для авто- и взаимнокорреляционных функций сложных дискретных сигналов в базисе В-К.

Т е о р е м а 1. [Граница Сидельникова–Сарвате в базисе В-К].

Рассмотрим ансамбль *P*, состоящий из *m* сигналов, заданных на множестве $\{0, 1, \ldots, N - 1\}$ при $N = n^s$. Пусть $\|x\|^2 = N$ для всех $x \in P$. Положим

$$R_c^{(n)} = \max\left\{|\, R_{xy}^{(n)}(j)\,|:\ x, y \in P,\ x \neq y,\ j \in 0 : N-1\right\},$$

$$R_a^{(n)} = \max\left\{|\, R_{xx}^{(n)}(j)\,|:\ x \in P,\ j \in 1 : N-1\right\}.$$

Тогда

$$\frac{[R_c^{(n)}]^2}{N} + \frac{N-1}{N(m-1)}\frac{[R_a^{(n)}]^2}{N} \geq 1. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через *A* суммарную энергию всех *n*-корреляционных функций ансамбля *P*:

$$A = \sum_{x,\, y \in P} \sum_{j=0}^{N-1} | R_{xy}^{(n)}(j)|^2 .$$

Запишем A в виде

$$A = \sum_{\substack{x,\, y \in P \\ x \neq y}} \sum_{j=0}^{N-1} | R_{xy}^{(n)}(j)|^2 + \sum_{x \in P} \sum_{j=0}^{N-1} | R_{xx}^{(n)}(j)|^2$$

и преобразуем первое слагаемое с учетом равенства (10):

$$\sum_{\substack{x,y \in P \\ x \neq y}} \sum_{j=0}^{N-1} | R_{xy}^{(n)}(j)|^2 = \sum_{\substack{x,y \in P \\ x \neq y}} \sum_{j=0}^{N-1} R_{xx}^{(n)}(j) \overline{R_{yy}^{(n)}(j)} = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{x \in P} R_{xx}^{(n)}(j) \sum_{\substack{y \in P \\ y \neq x}} \overline{R_{yy}^{(n)}(j)} .$$

Второе слагаемое представим в виде

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{x \in P} R_{xx}^{(n)}(j) \overline{R_{xx}^{(n)}(j)} .$$

Таким образом,

$$A = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{x \in P} R_{xx}^{(n)}(j) \left[\sum_{\substack{y \in P \\ y \neq x}} \overline{R_{yy}^{(n)}(j)} + \overline{R_{xx}^{(n)}(j)} \right] = \sum_{j=0}^{N-1} \left| \sum_{x \in P} R_{xx}^{(n)}(j) \right|^2 . \tag{12}$$

Поскольку $R_{xx}^{(n)}(0) = \|x\|^2 = N$ для всех $x \in P$, то

$$A = m^2 N^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \left| \sum_{x \in P} R_{xx}^{(n)}(j) \right|^2 \geq m^2 N^2 . \tag{13}$$

С другой стороны,

$$\sum_{\substack{x,\, y \in P \\ x \neq y}} \sum_{j=0}^{N-1} | R_{xy}^{(n)}(j)|^2 \leq N [R_c^{(n)}]^2 m(m-1) ,$$

$$\sum_{x \in P} \sum_{j=0}^{N-1} | R_{xx}^{(n)}(j)|^2 \leq mN^2 + m(N-1)[R_a^{(n)}]^2 ,$$

так что

$$A \leq m(m-1)N[R_c^{(n)}]^2 + m(N-1)[R_a^{(n)}]^2 + mN^2 . \tag{14}$$

Объединяя неравенства (13) и (14), получаем

$$m(m-1)N[R_c^{(n)}]^2 + m(N-1)[R_a^{(n)}]^2 \geq m(m-1)N^2 ,$$

что равносильно (11). Теорема доказана. ▲

С л е д с т в и е. Положив $R_{\max}^{(n)} = \max\{R_c^{(n)}, R_a^{(n)}\}$, получим

$$\frac{\left(R_{\max}^{(n)}\right)^2}{N} \geq \frac{N(m-1)}{Nm-1} . \tag{15}$$

Соотношения (11) и (15) представляют собой обобщение в базисе В-К неравенств (4) и (5), которые получаются как частный случай при $s = 1$.

Оптимальные ансамбли сигналов

Неравенство (15) показывает, что $R_a^{(n)}$ и $R_c^{(n)}$ не могут быть одновременно сколь угодно малыми величинами. Исследуем два крайних случая, когда одна из этих величин равна нулю, а вторая принимает наименьшее возможное значение.

Количество попарно n-некоррелированных сигналов в C_N не превосходит N, поскольку из n-некоррелированности сигналов следует, в частности, их ортогональность. Если в условиях теоремы 1 в ансамбле P имеется N попарно n-некоррелированных сигналов, то $R_c^{(n)} = 0$ и, согласно (11), $R_a^{(n)} \geq N$. Можно получить более точный результат.

Т е о р е м а 2. Пусть ансамбль P состоит из N попарно n-некоррелированных сигналов, причем $\|x\|^2 = N$ для всех $x \in P$. Тогда

$$\left|R_{xx}^{(n)}(j)\right| \equiv N \quad \text{для всех } x \in P. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (12) и (13)

$$\sum_{x\in P}\sum_{j=0}^{N-1} |R_{xx}^{(n)}(j)|^2 = \sum_{j=0}^{N-1}\left|\sum_{x\in P} R_{xx}^{(n)}(j)\right|^2 \geq N^4. \tag{17}$$

Вместе с тем, по неравенству Коши–Буняковского

$$\left|R_{xx}^{(n)}(j)\right| = \left|\sum_{k=0}^{N-1} x(j \underset{n}{\oplus} k)\overline{x(k)}\right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |x(j \underset{n}{\oplus} k)|\,|x(k)| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = N,$$

т. е. $\left|R_{xx}^{(n)}(j)\right| \leq N$. Если при некоторых $x \in P$ и $j \in 0 : N-1$ будет $\left|R_{xx}^{(n)}(j)\right| < N$, то

$$\sum_{x\in P}\sum_{j=0}^{N-1} |R_{xx}^{(n)}(j)|^2 < N^4,$$

что противоречит (17). Теорема доказана. ▲

Простейшим примером, иллюстрирующим теорему 2, является ансамбль, состоящий из дискретных функций Виленкина–Крестенсона (6). Действительно, в силу ортогональности и мультипликативности базисных функций [7, 8] при $k, k' \in 0 : N-1$ имеем

$$\sum_{l=0}^{N-1} v_k(j \underset{n}{\oplus} l)\overline{v_{k'}(l)} = v_k(j)\sum_{l=0}^{N-1} v_k(l)\overline{v_{k'}(l)} = N\omega_n^{\{k,j\}_s}\delta_N(k-k').$$

Значит, $R_{v_k v_{k'}}^{(n)}(j) \equiv 0$ при $k \neq k'$. При этом $R_{v_k v_k}^{(n)}(0) = N$. В согласии с (16) $\left|R_{v_k v_k}^{(n)}(j)\right| \equiv N$.

Другим крайним случаем являются ансамбли, состоящие из дельта-n-коррелированных сигналов. Если ансамбль P состоит из дельта-n-коррелированных сигналов x, удовлетворяющих условию $\|x\|^2 = N$, то $R_a^{(n)} = 0$ и, согласно (11), $R_c^{(n)} \geq \sqrt{N}$. Отметим, что последняя оценка не зависит от количества сигналов в ансамбле. Она обращается в равенство, если

$$\left|R_{xy}^{(n)}(j)\right| \equiv \sqrt{N} \quad \text{для всех } x, y \in P,\ x \neq y. \tag{18}$$

Регулярный класс дельта-n-коррелированных сигналов образуют обобщенные сигналы Франка–Крестенсона [9, 10]. Они строятся следующим образом. Рассмотрим матрицу Виленкина–Крестенсона

$$A_N[j_1, j_0] = v_{j_1}(j_0), \quad j_1, j_0 \in 0 : N-1$$

и построим на ее основе матрицу G_N с элементами

$$G_N[j_1, j_0] = a(j_1) A_N[\pi(j_1), j_0 \underset{n}{\oplus} p(j_1)],$$

где $a(j_1)$ — комплексные коэффициенты, π — перестановка чисел 0, 1, …, $N - 1$ и $p(j_1)$ — некоторые числа из множества $0 : N - 1$.

Сигнал Франка–Крестенсона $\varphi(j)$ принадлежит пространству C_{N^2} и на основном периоде $\{0, 1, \ldots, n^{2s} - 1\}$ определяется так:

$$\varphi(j_1N + j_0) = G_N[j_1, j_0], \quad j_1, j_0 \in 0 : N-1,$$

или, подробнее,

$$\varphi(j_1N + j_0) = a(j_1)\, \omega_n^{\{\pi(j_1), j_0\}_s}\, \omega_n^{\{\pi(j_1), p(j_1)\}_s}. \tag{19}$$

В [10] доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы сигнал φ вида (19) являлся дельта-n-коррелированным и удовлетворял условию $\|\varphi\|^2 = N$, необходимо и достаточно, чтобы $|a(j_1)| \equiv 1$ при $j_1 \in 0 : N - 1$.

Варьируя параметры a, π, p в формуле (19) при ограничении $|a(j_1)| \equiv 1$, можно строить ансамбли, состоящие из заведомо дельта-n-коррелированных сигналов. При этом можно выбирать параметры таким образом, чтобы выполнялось условие (18).

Особо выделим бинарные сигналы — дискретные периодические функции, принимающие только два значения: +1 и –1. Характерным примером бинарных сигналов являются дискретные функции Уолша

$$w_k(j) = (-1)^{\{k, j\}_s}, \quad k, j \in 0 : N-1,$$

— частный случай дискретных функций Виленкина–Крестенсона при $n = 2$.

Любой бинарный сигнал x удовлетворяет условию $\|x\|^2 = N$, поэтому для ансамблей бинарных сигналов справедливы соотношения (4) и (11). Однако на периодах $N > 4$ оптимальных ансамблей, реализующих точную границу неравенства (4) с $R_a^{(n)} = 0$, не существует, поскольку не существует дельта-коррелированных бинарных сигналов [5]. В то же время на периодах $N = 2^{2s}$ существуют бинарные дельта-2-коррелированные сигналы, например, сигналы Франка–Уолша

$$\psi(j_1N + j_0) = (-1)^{p(j_1)}\, w_{\pi(j_1)}(j_0), \quad j_1, j_0 \in 0 : 2^s - 1. \tag{20}$$

Дельта-2-коррелированность сигналов (20) следует из теоремы 3.

Выбором перестановки π и модулятора фазы p можно обеспечить построение ансамбля бинарных сигналов, реализующего точную границу неравенства (11) с $R_a^{(n)} = 0$ и $R_c^{(n)} = \sqrt{N}$ при $n = 2$. Например, на периоде $N = 16$ этим свойством будет обладать ансамбль из трех сигналов

$$\psi_1 = (w_0, w_1, w_2, w_3),$$

$$\psi_2 = (w_0, w_2, w_3, w_1),$$

$$\psi_3 = (w_0, , w_3\, w_1, w_2).$$

На периоде $N = 64$ таких сигналов будет уже семь:

$$\psi_1 = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7),$$

$$\psi_2 = (w_0, w_2, w_4, w_6, w_3, w_1, w_7, w_5),$$

$$\psi_3 = (w_0, w_3, w_6, w_5, w_7, w_4, w_1, w_2),$$

$$\psi_4 = (w_0, w_4, w_3, w_7, w_6, w_2, w_5, w_1),$$

$$\psi_5 = (w_0, w_5, w_1, w_4, w_2, w_7, w_3, w_6),$$

$$\psi_6 = (w_0, w_6, w_7, w_1, w_5, w_3, w_2, w_4),$$

$$\psi_7 = (w_0, w_7, w_5, w_2, w_1, w_6, w_4, w_3).$$

В общем случае можно сформулировать следующую гипотезу.

Г и п о т е з а. На каждом периоде длины $N = 2^{2s}$, $s \geq 2$, существует по крайней мере один ансамбль P, состоящий из $\sqrt{N}-1$ бинарных сигналов, удовлетворяющих условиям

$$\left|R_{xx}^{(2)}(j)\right| = N\delta_N(j) \quad \text{для всех } x \in P,$$

$$\left|R_{xy}^{(2)}(j)\right| \equiv \sqrt{N} \quad \text{для всех } x, y \in P,\ x \neq y.$$

Авторами статьи построены в явном виде ансамбли бинарных сигналов, подтверждающие гипотезу при $s = 2, 3, \ldots, 10$.

Литература

1. Сидельников В.М. О взаимной корреляции последовательностей. – ДАН СССР, 1971. – Т. 196. - № 3. – С.531-534.
2. Sarwate D.V. Bounds on Crosscorrelation and Autocorrelation of Sequences. – IEEE Transactions on Information Theory, vol.IT-25, No. 6, November 1979, pp.720-724.
3. Welch L.R. Lower bounds on the maximum crosscorrelation properties. – IEEE Transactions on Information Theory, vol.IT-20, May 1974, pp.397-399.
4. Pursley M.B. Performance Evaluation for Phase-Coded Spread Spectrum Multiple Access Communication. P.2. Code Sequence Analysis. – IEEE Trans., 1977, v. COM-25, No.8, pp.800-803.
5. Ипатов В.П. Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. – М.: Радио и связь, 1992. – 152 с.
6. Габидулин Э.М., Афанасьев В.Б. Кодирование в радиоэлектронике. – М.: Радио и связь, 1986. – 176 с.
7. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Сов. радио, 1975.
8. Малоземов В. Н., Машарский С. М. Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона // Алгебра и анализ, 2001. – Т.13. – Вып.1. – С.111-157.
9. Малоземов В.Н., Машарский С.М., Цветков К.Ю. Сигнал Франка и его обобщения // Проблемы передачи информации, 2001. – Т.37. – Вып.2. – С.18-26.
10. Малоземов В.Н., Цветков К.Ю. Об оптимальных парах сигнал-фильтр // Проблемы передачи информации, 2003. – Т.39. – Вып.2. – С.50-61.