В. А. Даугавет, Н. А. Таныгина

Оценка наилучшего приближения в равномерной ΣΠ-аппроксимации

Под ΣΠ-аппроксимацией понимается приближение функции многих переменных суммой произведений функций, каждая из которых зависит от меньшего числа переменных. Такая аппроксимация находит свое применение в вопросах повышения эффективности систем передачи информации, в теории обработки изображения и других областях. Впервые она была предложена E. Schmidt в 1907 г. [1], затем, в 1957 г. к ней обратился М.Р. Шура-Бура [2], но они рассматривали среднеквадратическую ΣΠ-аппроксимацию. Дискретный вариант равномерной ΣΠ-аппроксимации для функции от двух переменных впервые был рассмотрен в работе [3], позднее в работах [4, 5], где были получены необходимые и некоторые достаточные признаки локального минимума, а также предложен некоторый простой релаксационный процесс для поиска наилучшего равномерного приближения. Однако, этот процесс может не приводить к решению задачи, поэтому для установления близости полученного приближения к точному решению желательно иметь оценку снизу для наилучшего приближения. Вычислению такой оценки и посвящена предлагаемая статья. Описанная в статье вспомогательная задача является естественным обобщением двумерной чебышевской интерполяции, описанной в работе [6].

1. Постановка задачи. Пусть $F[M,N]$ произвольная вещественная матрица, где $M = \{1,\dots,m\}$, $N = \{1,\dots,n\}$, и r — некоторый целочисленный параметр, причем $1 \le r < \operatorname{rank} F$, $R = \{1,\dots,r\}$. Рассмотрим дискретную равномерную ΣΠ-аппроксимацию, т. е. равномерное приближение матрицы F произведением двух матриц $X[M,R]$ и $Y^T[R,N]$ меньшего размера:

$$\varphi(X,Y) := \max_{i\in M, j\in N}\Big|F[i,j] - \sum_{k\in R} X[i,k]Y[j,k]\Big| \to \inf_{\{X,Y\}\in\mathcal{M}_r}, \quad (1)$$

где под $\mathcal{M}_r$ понимается множество всевозможных пар вещественных матриц фиксированного размера $\{X[M,R], Y[N,R]\}$. Эта задача связана с проблемой сокращения объема информации, содержащейся в матрице F. Она рассматривалась, в частности, в работах [5, 6].

Известно, что задача (1) разрешима. Обозначим через μ_* *наилучшее приближение* матрицы F матрицами указанного размера, т. е.

$$\mu_* := \inf_{\mathcal{M}_r} \varphi(X, Y).$$

Имеется некоторый релаксационный процесс для поиска минимума функционала $\varphi(X, Y)$ [5]. Он заключается в следующем. Выбирается матрица $Y_0[N, R]$ и затем на каждом p-м шаге ($p = 1, 2, \ldots$) производятся следующие операции. Фиксируется матрица Y_{p-1} и находится X_p как решение линейной задачи

$$\varphi(X, Y_{p-1}) \to \inf_X .$$

Затем фиксируется матрица X_p, а Y_p находится как решение линейной задачи

$$\varphi(X_p, Y) \to \inf_Y .$$

Процесс продолжается до тех пор пока не выполнится неравенство $\|Y_p - Y_{p-1}\| < \delta$, где δ — заданная точность вычислений. Однако, в результате этого процесса полученная пара может оказаться далекой от решения, более того, может оказаться даже не стационарной для φ. В связи с этим хотелось бы иметь хорошие оценки снизу для μ_*, чтобы оценить близость полученного уклонения от наилучшего приближения. В данной работе показано, как находить эти оценки.

2. $\Sigma\Pi$-аппроксимация на полосе. Выделим из M подмножество M_1, состоящее из $(r+1)$ элементов, где r — параметр задачи (1). Пару множеств $\{M_1, N\}$ назовем *горизонтальной полосой.* Аналогичным образом определяется *вертикальная полоса:* $\{M, N_1\}$, где $|N_1| = r+1$. Далее будем рассматривать только горизонтальную полосу.

Для удобства изложения положим $F_L = F[M_1, N]$, строки матрицы F_L занумеруем от 0 до r и положим $R_0 = \{0, 1, \ldots, r\}$. Запишем задачу $\Sigma\Pi$-аппроксимации на горизонтальной полосе:

$$\varphi_L(U, Y) := \max_{i \in R_0, j \in N} \left| F_L[i, j] - \sum_{k \in R} U[i, k] Y[j, k] \right| \to \inf_{\{U, Y\} \in \mathcal{L}_r} . \quad (2)$$

Здесь $\mathcal{L}_r$ — множество пар произвольных матриц заданного размера $\{U[R_0, R], Y[N, R]\}$.

В отличие от задачи (1) для задачи на полосе можно предложить конечный алгоритм поиска глобального минимума функции $\varphi_L(U, Y)$, который будет описан ниже.

Пусть $\nu_L = \inf\limits_{\mathcal{L}_r} \varphi_L(U, Y)$. Очевидно, что

$$\mu_* \geq \nu_L.$$

Значит, решив задачу на полосе, получим оценку снизу для наилучшего приближения исходной задачи. Заметим, что если $\nu_L = 0$, то оценка не содержательна, поэтому следует выбирать такую полосу, для которой $\operatorname{rank} F_L = r + 1$, тогда и наилучшее приближение ν_L будет положительным.

Из выше сказанного следует, что, если для некоторой пары $\{X_*, Y_*\}$ из $\mathcal{M}_r$ и некоторой полосы оказалось, что

$$\varphi(X_*, Y_*) = \nu_L,$$

то пара $\{X_*, Y_*\}$ доставляет $\varphi(X, Y)$ глобальный минимум. Если же

$$\varphi(X_*, Y_*) - \nu_L \leq \varepsilon,$$

где ε достаточно мало, то пару можно принять за хорошее приближение к решению задачи (1).

Заметим, что $\Sigma\Pi$-аппроксимация на полосе является обобщением известной задачи двумерной чебышеской интерполяции [6], которая отличается от (2) тем, что множество N тоже имеет лишь $r + 1$ элементов. Предлагаемый ниже способ решения задачи (2) годится и для решения задачи двумерной чебышевской интерполяции.

3. Решение задачи на полосе. Рассмотрим другую задачу чебышевской аппроксимации с той же матрицей F_L

$$\Phi_L(w) := \max_{j \in N} \Big| \sum_{i \in R_0} w[i] F_L[i, j] \Big| \to \inf_{\|w\|_1 = 1}, \tag{3}$$

где $\|w\|_1 = \sum\limits_{i \in R_0} \big| w[i] \big|$. Ниже будет описан способ решения этой задачи, а сейчас покажем, что задача (2) эквивалентна задаче (3).

Лемма. *Для любой пары* $\{U,Y\}\in\mathcal{L}_r$ *найдется вектор* $w[R_0]$, $\|w\|_1=1$, *такой, что* $\Phi_L(w)\le\varphi_L(U,Y)$.

Доказательство. Количество строк у матрицы U на единицу больше количества столбцов, поэтому строки ее линейно зависимы. Значит, для каждой матрицы U найдется вектор $w[R_0]$ такой, что $\|w\|_1=1$ и $w^TU=\mathbf{0}$. Для пары U,w и произвольной матрицы Y докажем требуемое неравенство.

Положим

$$h[i,j]=F_L[i,j]-\sum_{k\in R}U[i,k]Y[j,k],\quad i\in R_0,\ j\in N,$$

тогда для всех $j\in N$ имеем $\sum\limits_{i\in R_0}w[i]h[i,j]=\sum\limits_{i\in R_0}w[i]F_L[i,j]$. Отсюда следует

$$\Phi_L(w)=\max_{j\in N}\Big|\sum_{i\in R_0}w[i]h[i,j]\Big|\le$$

$$\le\Big(\max_{i\in R_0,j\in N}\big|h[i,j]\big|\Big)\cdot\|w\|_1=\varphi_L(U,Y).$$

Лемма доказана. ■

Покажем, что для нахождения решения задачи (2) достаточно решить задачу (3).

Пусть имеется вектор $w_*[R_0],\|w_*\|_1=1$. По этому вектору построим пару матриц $\{U,Y\}$, которую будем называть *согласованной* с вектором w_* и которая строится по следующему правилу.

Положим

$$\xi[i]:=\begin{cases}1, & \text{если}\ \ w_*[i]\ge 0,\\ -1, & \text{если}\ \ w_*[i]<0,\end{cases}\quad i\in R_0,$$

$$\mu_j:=\sum_{i\in R_0}w_*[i]F_L[i,j],\quad j\in N,$$

$$\max_{i\in R_0}\big|w_*[i]\big|=\big|w_*[i_0]\big|,$$

$$\alpha[k]:=\begin{cases}-\frac{w_*[k-1]}{w_*[i_0]}, & k\in 1:i_0,\\ -\frac{w_*[k]}{w_*[i_0]}, & k\in i_0+1:r.\end{cases}$$

Построим пару матриц

$$Y^T[k,j]=\begin{cases}F_L[k-1,j]-\xi[k-1]\mu_j, & j\in N,\ k\in 1:i_0,\\ F_L[k,j]-\xi[k]\mu_j, & j\in N,\ k\in i_0+1:r,\end{cases}$$

$$
U[R_0,R]=\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\
\alpha[1] & \cdots & \alpha[i_0] & \alpha[i_0+1] & \cdots & \alpha[r]\\
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
$$

(в матрице $U[R_0,R]$ строка с номером i_0 совпадает с $\alpha[R]$, а если ее вычеркнуть, то останется единичная матрица).

Теорема. *Если w_* — решение задачи (3), то решением задачи (2) является пара $\{U,Y\}$, согласованная с вектором w_*, при этом*

$$
\varphi_L(U,Y)=\Phi_L(w_*)=\nu_L.
$$

Доказательство. Пусть пара $\{U,Y\}$ согласована с w_*. Рассмотрим матрицу $h[R_0,N]$ с компонентами:

$$
h[i,j]=F_L[i,j]-\sum_{k\in R}U[i,k]Y^T[k,j]
$$

и покажем, что ее чебышевская норма равна $\Phi_L(w_*)$. Замечаем, что для всех $i\neq i_0$ имеет место равенство

$$
h[i,j]=\begin{cases} F_L[i,j]-Y^T[i+1,j]=\xi[i]\mu_j, & i<i_0,\\ F_L[i,j]-Y^T[i,j]=\xi[i]\mu_j, & i>i_0.\end{cases}
$$

Покажем, что такое же равенство верно и для i_0 :

$$
h[i_0,j]=F_L[i_0,j]-\sum_{k\in R}\alpha[k]Y^T[k,j]=
$$

$$
=\frac{w_*[i_0]F_L[i_0,j]+\sum\limits_{k\in 1:i_0}w_*[k-1]Y^T[k,j]+\sum\limits_{k\in i_0+1:r}w_*[k]Y^T[k,j]}{w_*[i_0]}.
$$

Подставляя вместо $Y^T[j,k]$ его представление через F_L и μ_j, получаем

$$
h[i_0,j]=\frac{\mu_j-\mu_j\sum\limits_{k\in 1:i_0}\big|w_*[k-1]\big|-\mu_j\sum\limits_{k\in i_0+1:r}\big|w_*[k]\big|}{w_*[i_0]}=
$$

$$= \mu_j \frac{\left|w_*[i_0]\right|}{w_*[i_0]} = \xi[i_0]\mu_j.$$

Таким образом,

$$\varphi_L(U,Y) = \max_{i\in R_0, j\in N}\left|h[i,j]\right| = \max_{j\in N}|\mu_j| = \Phi_L(w_*).$$

Теперь из леммы следует, что $\{U,Y\}$ — решение задачи (2). Действительно, если существует пара $\{\hat{U},\hat{Y}\}$ с $\varphi_L(\hat{U},\hat{Y}) < < \varphi_L(U,Y)$, то по лемме существует $\hat{w}, \|\hat{w}\|_1 = 1$ такой, что $\Phi_L(\hat{w}) \le \varphi_L(\hat{U},\hat{Y}) < \Phi_L(w_*)$, что невозможно. ■

Перейдем к методу решения задачи (3). Заметим, что множество $\Omega = \left\{w \middle| \|w\|_1 = 1\right\}$ не является выпуклым, но его можно представить в виде объединения конечного числа выпуклых множеств:

$$\Omega = \cup_\xi \Omega(\xi),$$

где $\xi[R_0]$ — векторы, компоненты которых равны либо 1, либо (-1), а

$$\Omega(\xi) = \left\{w \,\middle|\, w[i]\xi[i] \ge 0, \quad \sum_{i\in R_0} w[i]\xi[i] = 1\right\}.$$

Очевидно, что задача (3) распадается на конечное число задач (при каждом фиксированном векторе ξ):

$$\Psi_L(w,\xi) = \max_{j\in N}\left|\sum_{i\in R_0} w[i]F_L[i,j]\right| \to \min_{w\in\Omega(\xi)}. \tag{4}$$

Значит, для решения задачи (3) необходимо решить задачу (4) при всех возможных ξ. Их число можно сократить, т. к. при ξ и $(-\xi)$ результат будет одинаков, поэтому можно зафиксировать $\xi[0] = 1$. Обозначим через $w(\xi)$ решение задачи (4) при заданном ξ. Тогда

$$\nu_L = \min_\xi \Psi_L(w(\xi),\xi) = \Psi_L(w(\xi_*),\xi_*)$$

и решением задачи (3) является вектор $w_* = w(\xi_*)$.

Осталось заметить, что задача (4) эквивалентна задаче линейного программирования.

4. Численные эксперименты.

Пример 1. Рассмотрим матрицу F

$$
\begin{pmatrix}
11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 20 & 22 & 26 & 33 & 33 & 34 & 35 \\
9 & 11 & 13 & 14 & 16 & 19 & 21 & 25 & 31 & 33 & 32 & 33 \\
9 & 11 & 12 & 14 & 15 & 16 & 20 & 24 & 29 & 31 & 30 & 32 \\
9 & 11 & 11 & 13 & 15 & 14 & 19 & 23 & 28 & 29 & 29 & 31 \\
6 & 8 & 11 & 12 & 15 & 18 & 19 & 24 & 28 & 30 & 29 & 31 \\
6 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 23 & 26 & 29 & 28 & 30 \\
7 & 12 & 10 & 11 & 14 & 13 & 17 & 22 & 23 & 25 & 24 & 30 \\
6 & 10 & 8 & 9 & 12 & 11 & 15 & 20 & 21 & 24 & 22 & 27 \\
5 & 7 & 8 & 10 & 12 & 11 & 16 & 20 & 21 & 24 & 22 & 27 \\
3 & 5 & 6 & 7 & 10 & 11 & 14 & 18 & 21 & 24 & 21 & 27
\end{pmatrix}.
$$

Применим к ней релаксационный процесс при $r = 3$, причем в качестве начальной матрицы Y_0 используем первые 3 строки матрицы F. В результате получается пара матриц $\{X_p, Y_p\}$ с уклонением $\varphi(X_p, Y_p) = 0.7179$. Матрица невязок $H_p = F - X_p Y_p^T$ (с округлением) имеет следующий вид:

$$
\begin{pmatrix}
0.14 & \mathbf{0.72} & 0.43 & 0.67 & 0.67 & \mathbf{0.72} & -0.03 & -\mathbf{0.72} & -0.53 & -0.62 & -0.68 & \mathbf{0.72} \\
-0.03 & 0.67 & 0.10 & -0.67 & -0.67 & 0.67 & 0.37 & -0.43 & -0.48 & 0.52 & -0.56 & 0.04 \\
0.62 & 0.62 & 0.19 & 0.41 & -0.62 & -0.44 & 0.45 & -0.11 & 0.03 & 0.62 & -0.01 & 0.20 \\
0.39 & -\mathbf{0.72} & -0.43 & -0.27 & -0.39 & -\mathbf{0.72} & -0.29 & -0.55 & \mathbf{0.72} & 0.15 & 0.68 & -\mathbf{0.72} \\
-0.62 & \mathbf{0.72} & 0.25 & -0.44 & 0.67 & \mathbf{0.72} & 0.58 & \mathbf{0.72} & -\mathbf{0.72} & -0.60 & -0.68 & \mathbf{0.72} \\
0.43 & -0.05 & -0.43 & -0.23 & -0.23 & -0.58 & -0.58 & 0.58 & -0.49 & -0.24 & 0.58 & 0.05 \\
-0.62 & \mathbf{0.72} & 0.10 & -0.67 & 0.27 & \mathbf{0.72} & -0.44 & \mathbf{0.72} & -\mathbf{0.72} & -0.62 & -0.68 & \mathbf{0.72} \\
0.47 & 0.58 & 0.24 & -0.55 & 0.37 & 0.54 & -0.58 & 0.58 & 0.45 & 0.46 & 0.58 & -0.48 \\
0.23 & -0.67 & 0.43 & 0.67 & 0.67 & -0.67 & 0.58 & 0.44 & -0.42 & -0.58 & -0.26 & -0.23 \\
0.62 & 0.43 & 0.19 & -0.60 & 0.40 & -\mathbf{0.72} & -0.15 & -\mathbf{0.72} & \mathbf{0.72} & -0.62 & -0.05 & \mathbf{0.72}
\end{pmatrix}.
$$

Как видно из таблицы, строки матрицы H_p, в которых присутствуют максимальные по модулю элементы, имеют номера $1, 4, 5, 7, 10$. Далее решим задачу на полосе $\{M_1, N\}$, где $M_1 = \{1, 4, 7, 10\}$. Перебрав все знаковые области $\Omega(\xi)$, получим, что наименьшее значение $\Psi_L(w, \xi)$ достигается для $\hat{\xi} = (1, -1, 1, 1)$. При этом $\nu_L := \Psi_L(w(\hat{\xi}), \hat{\xi}) = 0.6679$. Значит,

$$0.6679 \le \mu_* \le 0.7179.$$

Верхнюю оценку можно уменьшить, если повторить релаксационный процесс для всей матрицы F, взяв в качестве начальной матрицы Y_0 матрицу $\hat{Y}$ из пары $\{\hat{U}, \hat{Y}\}$, согласованной с вектором $w(\hat{\xi})$. Получается пара $\{X_*, Y_*\}$ с уклонением $\varphi(X_*, Y_*) = 0.7114$. Следовательно,

$$0.6679 \le \mu_* \le 0.7114$$

и пару $\{X_*, Y_*\}$ можно использовать как хорошее приближение к решению задачи (1).

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(i,j) = \frac{10}{i+j}$, заданную таблично, где i и j меняются от 1 до 1000 с шагом 1.

Релаксационный процесс для всей матрицы (таблицы функции) при $r = 3$ приводит к некоторой паре матриц $\{X_p, Y_p\}$ с уклонением $\varphi(X_p, Y_p) = 0.008409$. При этом строки, в которых присутствуют максимальные по модулю элементы матрицы невязок $H_p = F - X_p Y_p^T$, имеют номера 1, 2, 10, 107–117. Далее была решена задача на полосе $\{M_1, N\}$, где $M_1 = \{1, 2, 10, 117\}$, в результате чего наилучшее приближение на этой полосе оказалось равным $\nu_L = 0.008401$. Таким образом, получаем оценку

$$0.008401 \leq \mu_* \leq 0.008409,$$

из которой следует, что пара $\{X_p, Y_p\}$ практически является наилучшей аппроксимационной парой для рассматриваемой таблицы функций.

Для наилучшего приближения μ_* при $r = 8$ получаем следующую оценку

$$0.0000193 \leq \mu_* \leq 0.0000213.$$

Литература

[1] *E. Schmidt.* Zur Teorie der linearen und nichtlinearen integralgleihungen // I., Math. Annalen 63. 1907. P. 433–476.

[2] *Шура-Бура М.Р.* Аппроксимация функций многих переменных функциями, каждая из которых зависит от одного переменного. // Сб. Вычислительная математика. Вып. 2. М., изд-во АН СССР. 1957. С. 3–19.

[3] *Даугавет В.А.* О равномерном приближении функции двух переменных, заданной таблично, произведением функций одной переменной // ЖВММФ. Т. 11, № 2. 1971. С. 289–303.

[4] *Даугавет В.А.* Приближение функции двух переменных суммой произведений функций одной переменной // Методы вычислений. Вып. 12. ЛГУ, 1981. С. 174–186.

[5] *Даугавет В.А., Сазонова Л.В.* Некоторые вопросы многомерной аппроксимации // Методы вычислений. Т. 14. 1985. С. 109–127.

[6] *Даугавет В.А., Сазонова Л.В.* Двумерная чебышевская интерполяция // Вестн. Ленинград. ун-та. № 7. 1984. С. 89–91.