Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений

М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина

Светлой памяти
Татьяны Петровны Ильиной

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассматриваются матричные периодические дифференциальные операторы (ДО) $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{D})$, допускающие факторизацию $\mathcal{A} = \mathcal{X}^*\mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — однородный ДО первого порядка. Положим $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{D})$, $\varepsilon > 0$. Изучается поведение при $\varepsilon \to 0$ решений $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$ задачи Коши для уравнения Шредингера $i\partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$, а также для гиперболического уравнения $\partial_\tau^2 \mathbf{u}_\varepsilon = -\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$. Пусть $\mathbf{u}_0$ — решение соответствующей усредненной задачи. Получены оценки порядка ε по норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ при фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$ для разности $\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0$. Оценки равномерны относительно нормы начальных данных в пространстве Соболева $H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, где $s = 3$ в случае уравнения Шредингера и $s = 2$ в случае гиперболического уравнения. Прослежена зависимость постоянных в оценках от времени τ, что позволяет получать квалифицированные оценки погрешности при малом ε и большом $|\tau| = O(\varepsilon^{-\alpha})$ с подходящим $\alpha < 1$.

Оглавление

Ключевые слова: периодические операторы, нестационарные уравнения, задача Коши, пороговый эффект, усреднение, эффективный оператор

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00209-а).

§ 0. Введение

0.1. Класс операторов. Настоящая работа продолжает исследования авторов [BSu1−5], [Su1,2] по теории усреднений для одного класса (матричных) периодических дифференциальных операторов (ДО), действующих в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Этот класс достаточно широк и включает в себя многие операторы математической физики.

Рассматриваются эллиптические положительные матричные ДО второго порядка в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, допускающие факторизацию вида

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(g,f) = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}). \tag{0.1}$$

Здесь $b(\mathbf{D})$ — однородный матричный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами. Его символ $b(\boldsymbol{\xi})$ — $(m\times n)$-матрица ранга n (предполагается, что $m \geq n$). Матрицы-функции $f(\mathbf{x})$ (размера $n\times n$) и $g(\mathbf{x})$ (размера $m \times m$) предполагаются *периодическими* относительно некоторой решетки Γ в $\mathbb{R}^d$, причем

$$g(\mathbf{x}) > 0; \quad g,\ g^{-1} \in L_\infty; \quad f,\ f^{-1} \in L_\infty.$$

Более точное описание операторов (0.1) см. ниже в п. 4.1.

Целесообразно первоначально изучать более узкий класс операторов вида

$$\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}(g) = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{0.2}$$

и соответственно принять "двухуровневый" порядок изложения.

Операторы (0.1), (0.2) рассматриваются как самосопряженные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Нижний край спектра этих операторов есть точка $\lambda_0 = 0$.

Введем теперь малый параметр $\varepsilon > 0$ и условимся обозначать $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ для любой Γ-периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$. Рассмотрим операторы

$$\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{0.3}$$

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{0.4}$$

коэффициенты которых быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

0.2. Усреднение эллиптических и параболических задач. Проблему усреднения эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^d$ можно рассматривать, как проблему асимптотического описания резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ при $\varepsilon \to 0$. Будем для определенности говорить здесь о более простых операторах (0.4). В классической теории усреднений ключевым является следующий факт: существует *эффективный* оператор $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ с постоянной *эффективной* матрицей g^0 такой, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится (в каком-либо смысле) к резольвенте $(\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}$. Обычно рассматривается сильная (или даже слабая) сходимость. Строятся дальнейшие поправочные члены, главный из которых — член $\varepsilon K(\varepsilon)$ порядка ε, где оператор $K(\varepsilon)$ называется *корректором*. Оценки погрешности обычно находятся при условиях гладкости коэффициентов и при достаточной гладкости правых частей соответствующих уравнений.

Правило построения эффективной матрицы g^0 известно. В наших условиях оно описано ниже в §6.

В статьях [BSu1,2] впервые в теории усреднений было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится к резольвенте $(\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}$ по операторной L_2-норме. При этом выполнена оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \tag{0.5}$$

Постоянная C зависит лишь от параметров решетки Γ, от верхней и нижней границ матрицы-функции $g(\mathbf{x})$ и символа $b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta})$ при $|\boldsymbol{\theta}| = 1$.

В работах [BSu3,4] была найдена более точная аппроксимация резольвенты оператора (0.4) с учетом корректора:

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^2. \tag{0.6}$$

Подробно изучена структура корректора $K(\varepsilon)$. Наконец, в работе [BSu5] была найдена аппроксимация резольвенты оператора (0.4) по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$:

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \tag{0.7}$$

В [BSu2–5] для резольвенты оператора (0.3) были получены аналогичные, но несколько более сложные аппроксимации.

Помимо результатов для общего класса операторов вида (0.1), (0.2), предложенный авторами подход применялся и к усреднению стационарной периодической системы Максвелла. Эта задача изучалась в работах [BSu2, гл. 7], [BSu6], [Su3−5]. Исследование оператора Максвелла потребовало существенного развития техники.

Предложенный в [BSu1−5] подход применялся и к усреднению задачи Коши для параболического уравнения в работах [Su1,2]. Дело сводится к изучению операторной экспоненты $\exp(-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau)$, $\tau > 0$. В [Su1,2] получена следующая аппроксимация

$$\| \exp(-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau) - \exp(-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon\tau^{-1/2}. \tag{0.8}$$

В работе [V] Е. С. Василевской этот результат уточнен за счет введения корректора:

$$\| \exp(-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau) - \exp(-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau) - \varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon^2\tau^{-1}. \tag{0.9}$$

В [Su1,2], [V] аналогичные (но более сложные) аппроксимации получены и для экспоненты $\exp(-\mathcal{A}_\varepsilon\tau)$ от оператора (0.3).

0.3. Метод исследования, позволяющий получить оценки вида (0.5)−(0.9), уместно назвать *спектральным* методом. Имеется в виду активное использование методов спектральной теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. При этом значительная часть построений производится в рамках абстрактной теории операторов, и лишь затем реализуется на периодических дифференциальных операторах. Выясняется, что явление усреднения (гомогенизации) по своей природе является *пороговым*. Сказанное означает, что для построения усредненной задачи и оценки погрешности существенны лишь спектральные характеристики периодического оператора вблизи нижнего края спектра (так называемые пороговые характеристики). При этом удается активно использовать аппарат аналитической теории возмущений.

Отметим, что появление работ [BSu1,2] вызвало интерес в теории усреднений к получению оценок погрешности по операторной норме. В работах [Zh], [Pas], [ZhPas] оценки вида (0.5), (0.7) для операторов акустики и теории упругости (которые относятся к операторам вида (0.4)) были получены существенно иным (неспектральным) методом.

0.4. Нестационарные задачи. Спектральный подход в случае усреднения эллиптических и параболических задач достаточно подробно разработан. Иначе обстоит дело с усреднением нестационарных уравнений типа Шредингера и гиперболического типа. Именно этим задачам посвящена настоящая работа. При этом приходится преодолевать новые технические трудности.

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения типа Шредингера с оператором (0.4):

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} &= \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad \tau\in\mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{0.10}$$

где $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ — заданная функция.

Рассмотрим также следующую задачу Коши для гиперболического уравнения с оператором (0.4):

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad \tau\in\mathbb{R}, \\ \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}),\end{gathered} \tag{0.11}$$

где $\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ — заданные функции

Соответствующая "усредненная" задача для задачи (0.10) имеет вид

$$i\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = \widehat{\mathcal{A}}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \tag{0.12}$$

а "усредненная" задача для задачи (0.11) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -\widehat{\mathcal{A}}^0 \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{v}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}). \tag{0.13}$$

Здесь $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор.

Оказывается, что при $\varepsilon\to 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (0.10) сходится к решению $\mathbf{u}_0$ усредненной задачи (0.12) в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ при фиксированном $\tau\in\mathbb{R}$. Аналогичным образом, решение $\mathbf{v}_\varepsilon$ задачи (0.11) сходится к решению $\mathbf{v}_0$ усредненной задачи (0.13).

0.5. Основные результаты. *Основная цель настоящей работы* — получить квалифицированные оценки погрешностей $\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0$ и $\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ (при фиксированном $\tau\in\mathbb{R}$), равномерные относительно нормы начальных данных в подходящем пространстве Соболева $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Для решений задачи (0.10) получен следующий результат (теорема 14.1). Если $\boldsymbol{\phi}\in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ при некотором $0<s\le 3$, то $\mathbf{u}_\varepsilon$ сходится при $\varepsilon\to 0$ к $\mathbf{u}_0$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ при фиксированном $\tau\in\mathbb{R}$. При этом выполнена оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/3}\mathcal{C}_s(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{0.14}$$

Постоянная $\mathcal{C}_s(\tau)$ есть $O(|\tau|^{s/3})$ при большом $|\tau|$. Это позволяет рассмотреть большие значения времени $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$, и получить оценку

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s(1-\alpha)/3}\mathcal{C}_s(1)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}. \tag{0.15}$$

Если известно лишь, что $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, то можно утверждать сходимость $\mathbf{u}_\varepsilon$ к $\mathbf{u}_0$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ при фиксированном $\tau\in\mathbb{R}$, а также сходимость разности $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})$ (где $0<\alpha<1$) к нулю в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Для решений задачи (0.11) получен следующий результат (теорема 15.1). Если $\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}\in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ при некотором $0<s\le 2$, то $\mathbf{v}_\varepsilon$ сходится при $\varepsilon\to 0$ к $\mathbf{v}_0$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ при фиксированном $\tau\in\mathbb{R}$. При этом выполнена оценка

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/2}(\mathfrak{C}_s(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{C}'_s(\tau)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}). \tag{0.16}$$

Постоянная $\mathfrak{C}_s(\tau)$ есть $O(|\tau|^{s/2})$, а $\mathfrak{C}'_s(\tau)$ есть $O(|\tau|^{1+s/2})$ при большом $|\tau|$. Это позволяет рассмотреть большие значения времени $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$ и получить оценку

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_0(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{s(1-\alpha)/2}(\mathfrak{C}_s(1)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha}\mathfrak{C}'_s(1)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}). \quad (0.17)$$

Здесь $0 < \alpha < \frac{s}{s+2}$, если $\boldsymbol{\psi} \neq 0$, и $0 < \alpha < 1$ при $\boldsymbol{\psi} = 0$.

Если известно лишь, что $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то можно утверждать сильную сходимость $\mathbf{v}_\varepsilon$ к $\mathbf{v}_0$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ при фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$; в случае $\boldsymbol{\psi} = 0$ разность $\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_0(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha})$ (где $0 < \alpha < 1$) сходится к нулю в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$.

Изучаются также неоднородные задачи Коши (при наличии нетривиальной правой части в уравнениях). Соответствующие результаты получены в теоремах 14.2 и 15.2.

Для более общих задач Коши с операторами (0.3) получены аналогичные результаты (теоремы 14.3–14.6, 15.3–15.6).

Для получения описанных выше результатов мы исследуем поведение при малом ε операторной экспоненты $\exp(-i\mathcal{A}_\varepsilon\tau)$ (для операторов (0.3) и (0.4)), в терминах которой дается решение задачи Коши для уравнения типа Шредингера. В случае гиперболического уравнения требуется исследовать поведение при малом ε оператора $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$.

Найти полные аналоги оценок (0.5), (0.8) сейчас не удается. Однако, спектральный метод позволяет получить следующие опорные для всего дальнейшего факты. (Как и выше, здесь мы остановимся только на случае операторов (0.4).) Для того, чтобы установить оценку порядка ε, приходится "сглаживать" рассматриваемые оператор-функции от $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, домножая их на подходящую степень резольвенты оператора $\mathcal{H}_0 = -\Delta$. А именно, рассматриваются произведения $\exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon)(\mathcal{H}_0+I)^{-3/2}$ и $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})(\mathcal{H}_0 + I)^{-1}$, для которых устанавливаются следующие аппроксимации *по операторной норме в* $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$:

$$\| \left(\exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon) - \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0)\right)(\mathcal{H}_0 + I)^{-3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (C_1 + C_2|\tau|)\varepsilon, \quad (0.18)$$

$$\| \left(\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\right)(\mathcal{H}_0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (C_3 + C_4|\tau|)\varepsilon. \quad (0.19)$$

Оценки (0.18) и (0.19) являются подходящими аналогами оценок (0.5), (0.8) и представляют собой основные результаты работы в операторных терминах (для случая операторов (0.4)). Из (0.18) следует (0.14), а из (0.19) выводится оценка (0.16).

Аналогичные (но несколько более сложные) аппроксимации получены и для случая операторов (0.3).

0.6. Схема исследования. *Масштабное преобразование* позволяет вывести (0.18) и (0.19) из следующих двух оценок соответственно:

$$\| \left(\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}) - \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0)\right)\varepsilon^3(\mathcal{H}_0+\varepsilon^2 I)^{-3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (C_1+C_2|\tau|)\varepsilon, \quad (0.20)$$

$$\| \left(\cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}) - \cos(\tau\varepsilon^{-1}(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\right)\varepsilon^2(\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (C_3 + C_4|\tau|)\varepsilon. \quad (0.21)$$

Для получения оценок (0.20), (0.21) с помощью *унитарного преобразования Гельфанда* (см. ниже п. 4.3) оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. Операторы $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ действуют в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ (где Ω — ячейка решетки Γ) и зависят от параметра $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ (квазиимпульса). Оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ задается дифференциальным выражением $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ при периодических граничных условиях; спектр оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ дискретен. Семейство операторов $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ изучается методами аналитической теории возмущений спектра (относительно одномерного параметра $t = |\mathbf{k}|$). Для операторов $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ устанавливаются аналоги неравенств (0.20), (0.21) с не зависящими от $\mathbf{k}$ постоянными. Тогда обратное преобразование Гельфанда приводит к (0.20), (0.21).

Положим $\mathbf{k} = t\theta$, где $t = |\mathbf{k}|$, $|\theta| = 1$. Большую часть рассмотрений для семейства $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) =: \widehat{A}(t, \theta)$ удается провести в рамках абстрактной теоретико-операторной схемы. Изучается операторное семейство вида $A(t) = X(t)^* X(t)$, где $X(t) = X_0 + t X_1$, действующее в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Предполагается, что для оператора $A(0)$ точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным собственным значением конечной кратности. Выделяется оператор S конечного ранга (так называемый *спектральный росток* операторного семейства $A(t)$), действующий в пространстве $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} A(0)$. Спектральный росток (см. ниже п. 1.3) несет информацию о пороговых характеристиках оператора. В терминах спектрального ростка удается найти подходящие аппроксимации для оператор-функций $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}A(t))$, $\cos(\tau\varepsilon^{-1}A(t)^{1/2})$, домноженных на соответствующие "сглаживающие" множители. Применение этих абстрактных результатов и приводит к требуемым оценкам для дифференциальных операторов.

В рамках абстрактных рассмотрений мы опираемся на пороговые аппроксимации для семейства $A(t)$, полученные в статьях [BSu1,2] и [Su2].

Отметим, что применение масштабного преобразования выявляет пороговое происхождение эффекта усреднения и для рассматриваемых нестационарных задач.

Наши построения довольно многоступенчаты. Чтобы было ясно, какие новые трудности возникают в рассматриваемых нестационарных задачах, мы ограничились в настоящей работе решением вопросов первоначального уровня. В частности, пока остались в стороне аппроксимации и оценки погрешностей при учете корректоров. Далее, мы не касались нестационарной системы Максвелла, которая не подходит под наши общие теоремы и требует отдельных рассмотрений. Мы надеемся обратиться к упомянутым задачам в другом месте.

0.7. Остановимся теперь на результатах предшественников в вопросе об усреднениях для уравнения типа Шредингера и для гиперболических уравнений. При этом мы не претендуем на полноту обзора.

В задаче Коши для скалярного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 v_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = \operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla v_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$$

в [Sa], [BeLP] устанавливается сходимость решений v_ε к решению v_0 усредненной задачи в некотором слабом смысле. Какие-либо оценки погрешности отсутствуют.

Аналогичные результаты получены в [BeLP] также в задаче Коши для уравнения типа Шредингера

$$i\frac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x},\tau).$$

Отметим, однако, что в задачах по гомогенизации обычно рассматриваются уравнения не во всем $\mathbb{R}^d$, а в ограниченной области при каких-либо классических граничных условиях. Мы предпочитаем рассматривать задачи во всем пространстве, поскольку учет краевых условий ухудшает оценки погрешности за счет эффектов типа "пограничного слоя".

В [BaPa] изучалось усреднение в задаче Коши для матричного гиперболического уравнения достаточно общего вида (включающего систему теории упругости) в ограниченной области G. При условиях гладкости на данные задачи получены оценки погрешности $\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0$ по норме в $L_2(G\times(0,T))$ через $C\sqrt{\varepsilon}$. Эти оценки не являются равномерными относительно правой части уравнения; не прослеживается зависимость постоянной в оценке от T. В [BaPa] построены и дальнейшие члены асимптотического разложения решения $\mathbf{v}_\varepsilon$ по малому параметру, но мы не будем на этом останавливаться.

0.8. Структура статьи. Работа состоит из пяти глав. В главе 1 (§1–3) содержится необходимый абстрактный теоретико-операторный материал. В главе 2 (§4–6) изложены предварительные сведения о периодических дифференциальных операторах: описание рассматриваемого класса ДО, разложение в прямой интеграл и нахождение эффективных характеристик. Глава 3 (§7–10) посвящена пороговым аппроксимациям для сглаженных операторных функций $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A})$, $\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2})$ от операторов (0.1), (0.2). Здесь получены оценки (0.20), (0.21) и их аналоги для случая операторов (0.1) (см. теоремы 9.1, 9.2, 10.1, 10.2). В главе 4 (§11–15) рассматриваются задачи усреднения для уравнения типа Шредингера и для гиперболического уравнения. Здесь получены основные результаты работы в операторных терминах — оценки (0.18), (0.19) и их аналоги для случая операторов (0.3) (см. теоремы 12.1, 12.3, 13.1, 13.3). Затем эти результаты применяются к усреднению для задач Коши (0.10), (0.11), а также более общих задач. Результаты для уравнения типа Шредингера собраны в §14, а для гиперболического уравнения — в §15. Глава 5 (§16–18) посвящена применению общих результатов к задачам математической физики. В §16, 17 рассмотрены примеры уравнений типа Шредингера (модельный пример с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$, уравнение Шредингера с гамильтонианом $\mathcal{H}_\varepsilon = -\operatorname{div}\widetilde{g}^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla + \varepsilon^{-2}V^\varepsilon(\mathbf{x})$ и двумерное уравнение Паули). В §18 рассматриваются гиперболические задачи для уравнений акустики и системы теории упругости. Среди рассмотренных примеров есть задачи как с операторами вида (0.4), так и с операторами вида (0.3).

0.9. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{G}}$ означает норму ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$. Иногда мы опускаем индексы, если это не ведет к смешениям. Через $I = I_{\mathfrak{H}}$ обозначается единичный оператор в $\mathfrak{H}$. Если $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}$ — линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} A$ обозначается его область определения. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то

$\mathfrak{N}^\perp := \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}$. Если P — ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, то $P^\perp$ — ортопроектор на $\mathfrak{N}^\perp$. Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$ означает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, $|\cdot|$ — норма вектора в $\mathbb{C}^n$; $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n \times n)$-матрица.

Далее, $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x^j$, $j = 1, \dots, d$, $\nabla = \operatorname{grad} = (\partial_1, \dots, \partial_d)$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)$.

Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Векторные классы Соболева порядка s с индексом суммирования p в области $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$ обозначаются через $W_p^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. При $p = 2$ используем обозначения $H^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, $s \in \mathbb{R}$. При $n = 1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $W_p^s(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций и матриц-функций.

Через C, c, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные оценочные постоянные.

Глава 1. Операторные семейства, допускающие факторизацию. Абстрактная теоретико-операторная схема

В этой главе (§1–3) представлены факты из абстрактной теории самосопряженных операторов, лежащие в основе дальнейших построений. Эти факты дополняют сведения, приведенные в работах [BSu2, гл. 1], [BSu3], [BSu5, гл. 1], [Su2, §1, 2]. Как и прежде, изучаются факторизованные операторные семейства $A(t)$, квадратично зависящие от параметра $t \in \mathbb{R}$. Применяются методы аналитической теории возмущений дискретного спектра. Часть материала заимствуется из [BSu2, гл. 1] и [Su2, §1, 2] и приводится без доказательств.

Новые факты изложены полностью.

§1 содержит необходимые предварительные сведения. Основные результаты главы 1 касаются аппроксимаций оператор-функций от $A(t)$ (экспоненты $\exp(-i\tau A(t))$ и косинуса $\cos(\tau A(t)^{1/2})$) и содержатся в §2, 3. При этом результаты для операторной экспоненты собраны в п. 2.1, 2.4, 3.2, 3.3; результаты для операторного косинуса составляют содержание п. 2.3, 2.5, 3.4, 3.5.

§1. Предварительные сведения

Содержание настоящего параграфа заимствовано из [BSu2, гл. 1].

1.1. Квадратичные операторные пучки. Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть оператор $X_0 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ плотно определен и замкнут, а оператор $X_1 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ ограничен. На области определения $\operatorname{Dom} X(t) := \operatorname{Dom} X_0$ введем оператор $X(t) = X_0 + tX_1$, $t \in \mathbb{R}$. Наш основной объект — семейство операторов

$$A(t) := X(t)^* X(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

самосопряженных (и неотрицательных) в $\mathfrak{H}$. Оператор (1.1) порождается замкнутой квадратичной формой $\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $u \in \operatorname{Dom} X_0$. Введем обозначения $A_0 := A(0) = X_0^* X_0$,

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0, \quad \mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} X_0^*.$$

Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка в спектре оператора A_0 и
$$0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty, \quad n \le n_* := \dim \mathfrak{N}_* \le \infty.$$

Обозначим через $F(t,s)$ спектральный проектор оператора $A(t)$ для замкнутого промежутка $[0,s]$ и положим $\mathfrak{F}(t,s) := F(t,s)\mathfrak{H}$. *Фиксируем число $\delta > 0$ такое, что* $8\delta < d^0$, где d^0 — расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора A_0. Часто будем писать $F(t)$ вместо $F(t,\delta)$ и $\mathfrak{F}(t)$ вместо $\mathfrak{F}(t,\delta)$. Как показано в [BSu2, гл. 1, (1.3)],

$$F(t,\delta) = F(t,3\delta), \quad \operatorname{rank} F(t,\delta) = n, \quad |t| \le t^0 := \delta^{1/2}\|X_1\|^{-1}. \tag{1.2}$$

Через P и P_* обозначаются соответственно ортопроекторы в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и в $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$.

1.2. Оператор R. Пусть $\mathcal{D} := \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$ и пусть $z \in \mathfrak{H}_*$. Рассмотрим уравнение $X_0^*(X_0\psi - z) = 0$ относительно $\psi \in \mathcal{D}$, понимаемое в слабом смысле:

$$(X_0\psi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = (z, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \forall\ \zeta \in \mathcal{D}; \tag{1.3}$$

ср. [BSu2, гл. 1, (1.7)]. Решение ψ существует и единственно. Пусть теперь $\omega \in \mathfrak{N}$ и $z = -X_1\omega$. Элемент $\psi \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий (1.3) (при таком z), обозначим через $\psi(\omega)$. Введем линейный оператор $R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*$ (см. [BSu2, гл. 1, п. 1.2]):

$$R\omega = X_0\psi(\omega) + X_1\omega \in \mathfrak{N}_*, \quad \omega \in \mathfrak{N}.$$

Другое описание оператора R дается формулой $R = P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$.

1.3. Спектральный росток S семейства $A(t)$ при $t = 0$. *Спектральным ростком* операторного семейства (1.1) при $t = 0$ называется (см. [BSu2, гл. 1, п. 1.3]) самосопряженный оператор
$$S := R^*R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}.$$

Для ростка справедливо также соотношение $S = PX_1^*P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$ и оценка

$$\|S\| \le \|X_1\|^2. \tag{1.4}$$

Спектральный росток S называется *невырожденным*, если $\operatorname{Ker} S = \{0\}$.

Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [Ka]), при $|t| \le t^0$ существуют вещественно аналитические функции $\lambda_l(t)$ (ветви собственных значений) и вещественно аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l(t)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$A(t)\varphi_l(t) = \lambda_l(t)\varphi_l(t), \quad l = 1,\dots,n, \quad |t| \le t^0, \tag{1.5}$$

причем $\varphi_l(t)$, $l = 1,\dots,n$, образуют *ортонормированный базис* в $\mathfrak{F}(t)$. *Для достаточно малого t_** при $|t| \le t_*$ справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t) = \gamma_l t^2 + \mu_l t^3 + \cdots, \quad \gamma_l \ge 0, \quad \mu_l \in \mathbb{R}, \quad l = 1,\dots,n, \tag{1.6}$$

$$\varphi_l(t) = \omega_l + t\varphi_l^{(1)} + t^2\varphi_l^{(2)} + \cdots, \quad l = 1, \dots, n. \tag{1.7}$$

Элементы $\omega_l := \varphi_l(0)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$.

Как показано в [BSu2, гл. 1, предложение 1.6], числа γ_l и элементы ω_l, определенные в (1.5)–(1.7), являются собственными для оператора S:

$$S\omega_l = \gamma_l\omega_l, \quad l = 1, \dots, n. \tag{1.8}$$

Соотношения (1.8) дают независимое (спектральное) определение ростка. Невырожденность ростка равносильна тому, что при некотором $c_* > 0$ выполнены неравенства

$$\gamma_l \geq c_* > 0, \quad l = 1, \dots, n. \tag{1.9}$$

1.4. Пороговые аппроксимации. Как показано в [BSu2, гл. 1, теоремы 4.1 и 4.3], для спектрального проектора $F(t) = F(t, \delta)$ и для оператора $A(t)F(t)$ справедливы следующие аппроксимации:

$$F(t) - P = \Phi(t), \quad \|\Phi(t)\| \leq C_1|t|, \quad |t| \leq t^0, \tag{1.10}$$

$$A(t)F(t) - t^2SP = \Psi(t), \quad \|\Psi(t)\| \leq C_2|t|^3, \quad |t| \leq t^0. \tag{1.11}$$

Здесь P — ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, а S — спектральный росток операторного семейства $A(t)$ при $t = 0$. Число t^0 определено в (1.2), постоянные C_1, C_2 имеют вид

$$C_1 = \beta_1\delta^{-1/2}\|X_1\|, \quad C_2 = \beta_2\delta^{-1/2}\|X_1\|^3, \tag{1.12}$$

где β_1, β_2 — абсолютные константы, значения которых допускают явный контроль.

Отметим, что из (1.11) и (1.4) вытекает оценка

$$\|A(t)F(t)\| \leq C_3t^2, \quad |t| \leq t^0, \tag{1.13}$$

где

$$C_3 := \|X_1\|^2 + C_2t^0 = (1 + \beta_2)\|X_1\|^2. \tag{1.14}$$

Последнее равенство в (1.14) выполнено в силу (1.2) и (1.12).

§ 2. Пороговые аппроксимации для операторов $e^{-i\tau A(t)}$ и $\cos(\tau A(t)^{1/2})$

2.1. Приближение для $e^{-i\tau A(t)}$. На основании пороговых аппроксимаций (1.10), (1.11) в [BSu2, гл. 1, теорема 4.6] установлено следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Справедлива оценка*

$$\|e^{-i\tau A(t)}F(t) - e^{-i\tau t^2SP}P\| \leq C_1|t| + C_2|\tau||t|^3, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad |t| \leq t^0, \tag{2.1}$$

где t^0 определено в (1.2), *а C_1, C_2 определены в* (1.12).

Для удобства читателя мы продублируем здесь вывод оценки (2.1) из (1.10) и (1.11).

Доказательство. Положим

$$E(\tau) := e^{-i\tau A(t)}F(t) - e^{-i\tau t^2 SP}P, \qquad\qquad (2.2)$$
$$\Sigma(\tau) := e^{i\tau t^2 SP}E(\tau) = e^{i\tau t^2 SP}F(t)e^{-i\tau A(t)} - P.$$

Отметим, что $\Sigma(0) = F(t) - P = \Phi(t)$. Далее,

$$\frac{d\Sigma(\tau)}{d\tau} = ie^{i\tau t^2 SP}(t^2 SP - A(t)F(t))F(t)e^{-i\tau A(t)},$$

откуда $\|\Sigma'(\tau)\| = \|\Psi(t)F(t)\| \leq \|\Psi(t)\|$. Следовательно, с учетом (2.2), оценок (1.10) и (1.11), получаем

$$\|E(\tau)\| = \|\Sigma(\tau)\| \leq \|\Phi(t)\| + |\tau|\|\Psi(t)\| \leq C_1|t| + C_2|\tau||t|^3, \quad |t| \leq t^0. \bullet$$

2.2. Приближение для $A(t)^{1/2}F(t)$. Ниже мы накладываем (ср. [BSu2, гл. 1, (5.1)]) следующее дополнительное условие на операторное семейство $A(t)$.

Условие 2.2. *При некотором* $c_* > 0$ *выполнено неравенство*

$$A(t) \geq c_* t^2 I, \quad |t| \leq t^0. \qquad (2.3)$$

Условие 2.2 равносильно тому, что для собственных значений $\lambda_l(t)$, $l = 1, \ldots, n$, оператора $A(t)$ (см. (1.5)) выполнено

$$\lambda_l(t) \geq c_* t^2, \quad l = 1, \ldots, n, \quad c_* > 0, \quad |t| \leq t^0.$$

Тогда, в силу (1.6), неравенства (1.9) выполнены с той же постоянной c_*, что и в (2.3). Поэтому (см. (1.8)) росток S невырожден, причем

$$S \geq c_* I_{\mathfrak{N}}. \qquad (2.4)$$

Рассмотрим разность

$$\Xi(t) := A(t)^{1/2}F(t) - (t^2 S)^{1/2}P. \qquad (2.5)$$

Используя обозначение $\Phi(t) = F(t) - P$, преобразуем выражение (2.5) к виду

$$\Xi(t) = A(t)^{1/2}F(t)(P + \Phi(t)) - (F(t) - \Phi(t))(t^2 S)^{1/2}P = \Xi_1(t) + \Xi_2(t) + \Xi_3(t). \qquad (2.6)$$

Член $\Xi_1(t) := A(t)^{1/2}F(t)\Phi(t)$ оценивается на основании (1.10) и (1.13):

$$\|\Xi_1(t)\| \leq C_1 C_3^{1/2} t^2, \quad |t| \leq t^0. \qquad (2.7)$$

Член $\Xi_2(t) := \Phi(t)(t^2 S)^{1/2}P$ оценивается с помощью (1.10) и (1.4):

$$\|\Xi_2(t)\| \leq C_1\|X_1\|t^2, \quad |t| \leq t^0. \qquad (2.8)$$

Остается оценить член

$$\Xi_3(t) := A(t)^{1/2}F(t)P - F(t)(t^2S)^{1/2}P = (A(t)^{1/2}F(t)|_{\mathfrak{N}} - F(t)(t^2S)^{1/2})P. \qquad (2.9)$$

Будем опираться на теорему об оценке разности дробных степеней положительных операторов (см. теорему 3.3 из статьи [BS]). Сформулируем нужный нам вариант (частный случай) этой теоремы; нам достаточно считать, что рассматриваемые операторы ограничены.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ — сепарабельные гильбертовы пространства, $B_0 : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$, $B_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ — ограниченные положительные операторы. Пусть $J : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1$ — ограниченный оператор. Тогда справедлива оценка*

$$2\|B_1^{1/2}J - JB_0^{1/2}\|_{\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_1} \le \|B_1^{-1/4}(B_1J - JB_0)B_0^{-1/4}\|_{\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_1}. \qquad (2.10)$$

Применим теорему 2.3 при $\mathcal{H}_0 = \mathfrak{N}$, $\mathcal{H}_1 = \mathfrak{F}(t)$, $B_0 = t^2S$, $B_1 = A(t)|_{\mathfrak{F}(t)}$, $J = F(t)|_{\mathfrak{N}}$. Если $t \ne 0$ и $|t| \le t^0$, то все условия теоремы 2.3 выполнены (с учетом условия 2.2 и оценки (2.4)). Поэтому, в силу (2.10), для оператора (2.9) выполнена оценка

$$\begin{aligned} 2\|\Xi_3(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} &= 2\|A(t)^{1/2}F(t)|_{\mathfrak{N}} - F(t)(t^2S)^{1/2}\|_{\mathfrak{N}\to\mathfrak{F}(t)} \\ &\le \|A(t)^{-1/4}(A(t)F(t)|_{\mathfrak{N}} - F(t)t^2S)(t^2S)^{-1/4}\|_{\mathfrak{N}\to\mathfrak{F}(t)} \\ &\le \|A(t)^{-1/4}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\|A(t)F(t) - t^2SP\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\|(t^2S)^{-1/4}\|_{\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.3), (2.4) и (1.11) получаем

$$\|\Xi_3(t)\| \le \frac{1}{2}C_2c_*^{-1/2}t^2, \quad |t| \le t^0. \qquad (2.11)$$

Мы учли, что при $t = 0$ неравенство (2.11), очевидно, выполнено, поскольку $\Xi_3(0) = 0$.

Окончательно, из (2.5)–(2.8), (2.11) вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Справедлива оценка*

$$\|A(t)^{1/2}F(t) - (t^2S)^{1/2}P\| \le C_4t^2, \quad |t| \le t^0, \qquad (2.12)$$

где

$$C_4 := C_1C_3^{1/2} + C_1\|X_1\| + \frac{1}{2}C_2c_*^{-1/2}. \qquad (2.13)$$

2.3. Приближение для оператора $\cos(\tau A(t)^{1/2})F(t)$.

Теорема 2.5. *Справедлива оценка*

$$\|\cos(\tau A(t)^{1/2})F(t) - \cos(\tau(t^2S)^{1/2}P)P\| \le C_1|t| + C_4|\tau|t^2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad |t| \le t^0, \qquad (2.14)$$

где t^0 определено в (1.2), *а* C_1, C_4 *определены в* (1.12), (2.13).

Доказательство. Рассуждаем аналогично доказательству теоремы 2.1. Положим

$$\begin{aligned} \widetilde{E}(\tau) &:= e^{-i\tau A(t)^{1/2}}F(t) - e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}P, \\ \widetilde{\Sigma}(\tau) &:= e^{i\tau(t^2S)^{1/2}P}\widetilde{E}(\tau) = e^{i\tau(t^2S)^{1/2}P}F(t)e^{-i\tau A(t)^{1/2}} - P. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Тогда $\widetilde{\Sigma}(0) = F(t) - P = \Phi(t)$ и

$$\frac{d\widetilde{\Sigma}(\tau)}{d\tau} = ie^{i\tau(t^2S)^{1/2}P}((t^2S)^{1/2}P - A(t)^{1/2}F(t))F(t)e^{-i\tau A(t)^{1/2}},$$

откуда $\|\Sigma'(\tau)\| \le \|A(t)^{1/2}F(t) - (t^2S)^{1/2}P\|$. С учетом (2.15), оценок (1.10) и (2.12), получаем

$$\|\widetilde{E}(\tau)\| = \|\widetilde{\Sigma}(\tau)\| \le \|\Phi(t)\| + |\tau|\|A(t)^{1/2}F(t) - (t^2S)^{1/2}P\| \le C_1|t| + C_4|\tau|t^2, \quad |t| \le t^0.$$

Отсюда вытекает (2.14). •

2.4. Аппроксимация "сглаженного" оператора $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}A(t))$ **при малом** ε**.** Введем теперь параметр $\varepsilon > 0$. Нам потребуется исследовать поведение оператора $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}A(t))$ при малом ε. Заменим τ на $\varepsilon^{-2}\tau$ в (2.1). Тогда

$$\begin{aligned} \|\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}A(t))F(t) - \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}t^2SP)P\| \le C_1|t| + C_2|\tau|\varepsilon^{-2}|t|^3, \\ \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad |t| \le t^0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Домножим оператор под знаком нормы в (2.16) на $\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}P$. Полученное произведение, т. е., оператор

$$\Upsilon(t,\varepsilon,\tau) := \big(\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}A(t))F(t) - \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}t^2SP)P\big)\,\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}P, \tag{2.17}$$

допускает оценку порядка ε. В приложениях к дифференциальным операторам такое домножение переходит в сглаживание начальных данных. Из (2.16) вытекает, что оператор (2.17) подчинен оценке

$$\begin{aligned} \|\Upsilon(t,\varepsilon,\tau)\| \le (C_1|t| + C_2|\tau|\varepsilon^{-2}|t|^3)\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \le (C_1 + C_2|\tau|)\varepsilon, \\ \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad |t| \le t^0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Покажем теперь, что оценка порядка ε сохраняет силу, если в выражении (2.17) заменить проектор $F(t)$ тождественным оператором I. Поскольку $F(t)^\perp P = (I - F(t))P = (P - F(t))P$, то с учетом (1.10) и (2.19) получаем

$$\begin{aligned} &\|\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}A(t))F(t)^\perp\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}P\| \le \|\Phi(t)\|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \\ &\le C_1|t|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \le C_1\varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad |t| \le t^0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Отсюда и из (2.18) вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\| \left(\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)) - \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}t^2SP)P\right)\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}P\| \\ &\le (2C_1 + C_2|\tau|)\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon>0, \quad |t|\le t^0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Здесь число t^0 *определено в* (1.2), *а постоянные* C_1, C_2 *заданы в* (1.12).

2.5. Аппроксимация "сглаженного" оператора $\cos(\tau\varepsilon^{-1}A(t)^{1/2})$ **при малом** ε**.** Нас интересует поведение оператора $\cos(\tau\varepsilon^{-1}A(t)^{1/2})$ при малом ε. Заменяя τ на $\varepsilon^{-1}\tau$ в (2.14), получаем

$$\begin{aligned} \| \cos(\tau\varepsilon^{-1}A(t)^{1/2})F(t) - \cos(\tau\varepsilon^{-1}(t^2S)^{1/2}P)P\| \le C_1|t| + C_4|\tau|\varepsilon^{-1}t^2, \\ \tau\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon>0, \quad |t|\le t^0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Домножим оператор под знаком нормы в (2.21) на $\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}P$. В силу (2.21), полученный оператор удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} &\| \Big(\cos(\tau\varepsilon^{-1}A(t)^{1/2})F(t) - \cos(\tau\varepsilon^{-1}(t^2S)^{1/2}P)P\Big)\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}P\| \\ &\le (C_1|t| + C_4|\tau|\varepsilon^{-1}t^2)\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \le (C_1 + C_4|\tau|)\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon>0, \quad |t|\le t^0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Аналогично (2.19), имеем:

$$\begin{aligned} \| \cos(\tau\varepsilon^{-1}A(t)^{1/2})F(t)^{\perp}\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}P\| \le C_1|t|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \le C_1\varepsilon, \\ \tau\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon>0, \quad |t|\le t^0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.22) вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.7. *Справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\| \Big(\cos(\tau\varepsilon^{-1}A(t)^{1/2}) - \cos(\tau\varepsilon^{-1}(t^2S)^{1/2}P)P\Big)\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}P\| \\ &\le (2C_1 + C_4|\tau|)\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon>0, \quad |t|\le t^0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Здесь число t^0 *определено в* (1.2), *постоянные* C_1, C_4 *заданы в* (1.12), (2.13).

§3. Пороговые аппроксимации в случае семейства $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$

3.1. Операторное семейство вида $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$**.** Содержание данного пункта заимствовано из [BSu2, гл. 1, п. 1.5] и [Su2, п. 1.3]. Наряду с пространством $\mathfrak{H}$ рассмотрим еще одно сепарабельное гильбертово пространство $\widehat{\mathfrak{H}}$. Пусть $\widehat{X}(t) = \widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1 : \widehat{\mathfrak{H}} \to \mathfrak{H}_*$ — семейство операторов того же вида, что и $X(t)$, причем для $\widehat{X}(t)$ выполнены предположения п. 1.1. При этом пространство $\mathfrak{H}_*$ остается прежним. Пусть $M : \mathfrak{H} \to \widehat{\mathfrak{H}}$ — изоморфизм. Предположим, что $M\,\mathrm{Dom}\,X_0 = \mathrm{Dom}\,\widehat{X}_0$, $X(t) = \widehat{X}(t)M$, а тогда и $X_0 = \widehat{X}_0M$, $X_1 = \widehat{X}_1M$. В $\widehat{\mathfrak{H}}$ введем семейство самосопряженных операторов $\widehat{A}(t) = \widehat{X}(t)^*\widehat{X}(t)$. Тогда, очевидно,

$$A(t) = M^*\widehat{A}(t)M. \tag{3.1}$$

Все объекты, отвечающие семейству $\widehat{A}(t)$, далее помечаются значком "$\frown$". Отметим, что $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$, $\widehat{n} = n$, $\widehat{\mathfrak{N}}_* = \mathfrak{N}_*$, $\widehat{n}_* = n_*$, $\widehat{P}_* = P_*$.

В пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$ рассмотрим положительно определенный оператор

$$Q := (MM^*)^{-1} : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}. \tag{3.2}$$

Пусть $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — блок оператора Q в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$, т. е.

$$Q_{\widehat{\mathfrak{N}}} = \widehat{P}Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}. \tag{3.3}$$

Очевидно, $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\widehat{\mathfrak{N}}$.

Как показано в [Su2, предложение 1.2], ортопроектор P в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и ортопроектор $\widehat{P}$ в $\widehat{\mathfrak{H}}$ на $\widehat{\mathfrak{N}}$ связаны соотношением

$$P = M^{-1}(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1}. \tag{3.4}$$

Пусть $\widehat{S} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\widehat{A}(t)$ при $t = 0$, а S — росток семейства $A(t)$. В [BSu2, гл. 1, п. 1.5] установлено следующее тождество

$$S = PM^*\widehat{S}M|_{\mathfrak{N}}. \tag{3.5}$$

3.2. Аппроксимация "окаймленной" экспоненты $e^{-i\tau A(t)}$. Наша цель в данном пункте — найти аппроксимацию для операторной экспоненты $e^{-i\tau A(t)}$ в случае семейства вида (3.1) в терминах ростка $\widehat{S}$ оператора $\widehat{A}(t)$ и изоморфизма M. Как выяснится ниже, удобно аппроксимировать экспоненту, "окаймленную" подходящими множителями.

Сначала рассмотрим оператор

$$\Lambda(\tau) := Me^{-i\tau t^2 SP}PM^* : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}. \tag{3.6}$$

Используя обозначения (3.2), (3.3), положим

$$M_0 := (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1/2} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}. \tag{3.7}$$

Следующее утверждение является аналогом предложения 2.3 из [Su].

Предложение 3.1. *Для действующего в $\widehat{\mathfrak{H}}$ оператора* (3.6) *справедливо представление*

$$\Lambda(\tau) = M_0 e^{-i\tau t^2 M_0\widehat{S}M_0} M_0\widehat{P}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Пусть $\widehat{\eta} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ и $\widehat{\xi}(\tau) = \Lambda(\tau)\widehat{\eta}$. Тогда $M^{-1}\widehat{\xi}(\tau) \in \mathfrak{N}$, $\widehat{\xi}(\tau) \in \widehat{\mathfrak{N}}$, и $M^{-1}\widehat{\xi}(\tau)$ является решением задачи Коши

$$i\frac{d}{d\tau}M^{-1}\widehat{\xi}(\tau) = t^2 SM^{-1}\widehat{\xi}(\tau), \quad M^{-1}\widehat{\xi}(0) = PM^*\widehat{\eta}. \tag{3.9}$$

В силу (3.5), $SM^{-1}\widehat{\xi}(\tau) = PM^*\widehat{S}\widehat{\xi}(\tau)$. Далее, из (3.4) с учетом обозначения (3.7) получаем, что

$$PM^* = M^{-1}(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P} = M^{-1}M_0^2\widehat{P}. \tag{3.10}$$

Тогда из (3.9) следует, что

$$i\frac{d}{d\tau}\widehat{\xi}(\tau) = t^2 M_0^2\widehat{S}\widehat{\xi}(\tau), \quad \widehat{\xi}(0) = M_0^2\widehat{P}\widehat{\eta},$$

или, что равносильно,

$$i\frac{d}{d\tau}M_0^{-1}\widehat{\xi}(\tau) = t^2 M_0\widehat{S}M_0(M_0^{-1}\widehat{\xi}(\tau)), \quad M_0^{-1}\widehat{\xi}(0) = M_0\widehat{P}\widehat{\eta}.$$

Следовательно, $M_0^{-1}\widehat{\xi}(\tau) = e^{-i\tau t^2 M_0\widehat{S}M_0}M_0\widehat{P}\widehat{\eta}$, откуда вытекает (3.8). •

Будем исходить из оценки (2.1). С учетом (1.10) получаем

$$\| \left(e^{-i\tau A(t)} - e^{-i\tau t^2 SP}\right) P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \le 2C_1|t| + C_2|\tau||t|^3, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad |t|\le t^0.$$

Отсюда непосредственно следует оценка

$$\|Me^{-i\tau A(t)}PM^* - Me^{-i\tau t^2 SP}PM^*\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \le \|M\|^2\left(2C_1|t| + C_2|\tau||t|^3\right), \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad |t|\le t^0. \tag{3.11}$$

С учетом предложения 3.1 и тождества (3.10), неравенство (3.11) перепишется в виде

$$\begin{gathered}\|Me^{-i\tau A(t)}M^{-1}M_0^2\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau t^2 M_0\widehat{S}M_0}M_0\widehat{P}\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \le \|M\|^2\left(2C_1|t| + C_2|\tau||t|^3\right), \\ \tau\in\mathbb{R}, \quad |t|\le t^0.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Домножая операторы под знаком нормы в (3.12) справа на $M_0^{-2}\widehat{P}$ и учитывая, что $\|M_0^{-2}\| = \|Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\| \le \|Q\| = \|M^{-1}\|^2$, получаем

$$\begin{gathered}\|Me^{-i\tau A(t)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau t^2 M_0\widehat{S}M_0}M_0^{-1}\widehat{P}\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \le \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\left(2C_1|t| + C_2|\tau||t|^3\right), \\ \tau\in\mathbb{R}, \quad |t|\le t^0.\end{gathered} \tag{3.13}$$

3.3. Аппроксимация сглаженной окаймленной экспоненты. Заменим теперь в (3.13) τ на $\tau\varepsilon^{-2}$ и домножим получившийся оператор на $\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\widehat{P}$. Имеем:

$$\begin{aligned}&\| \left(M\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}A(t))M^{-1}\widehat{P} - M_0\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 M_0\widehat{S}M_0)M_0^{-1}\widehat{P}\right)\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\widehat{P}\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \\ &\le \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\left(2C_1|t| + C_2|\tau|\varepsilon^{-2}|t|^3\right)\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \\ &\le \|M\|^2\|M^{-1}\|^2(2C_1 + C_2|\tau|)\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon>0, \quad |t|\le t^0.\end{aligned}$$

Мы установили следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть $A(t)$ и $\widehat{A}(t)$ связаны соотношением* (3.1). *Пусть $\widehat{S}$ — росток оператора $\widehat{A}(t)$, а M_0 — оператор* (3.7). *Тогда выполнена оценка*

$$\begin{aligned}&\| \left(M \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}A(t))M^{-1} - M_0 \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 M_0 \widehat{S} M_0) M_0^{-1} \widehat{P} \right) \varepsilon^3 (t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \widehat{P} \|_{\widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}} \\ &\le \|M\|^2 \|M^{-1}\|^2 (2C_1 + C_2|\tau|)\varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad |t| \le t^0.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Здесь величина t^0 определена в (1.2), *постоянные C_1 и C_2 определены в* (1.12).

3.4. Аппроксимация "окаймленного" оператора $\cos(\tau A(t)^{1/2})$**.** Аналогично пункту 3.2, сейчас мы хотели бы найти аппроксимацию для оператора $\cos(\tau A(t)^{1/2})$ в случае семейства вида (3.1) в терминах ростка $\widehat{S}$ оператора $\widehat{A}(t)$ и изоморфизма M. При этом оказывается удобным окаймить этот оператор подходящими множителями.

Начнем с рассмотрения оператора

$$\widetilde{\Lambda}(\tau) := M \cos(\tau (t^2 S)^{1/2} P) P M^* : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}. \tag{3.15}$$

Аналогично предложению 3.1 установим следующее утверждение.

Предложение 3.3. *Для действующего в $\widehat{\mathfrak{H}}$ оператора* (3.15) *справедливо представление*

$$\widetilde{\Lambda}(\tau) = M_0 \cos(\tau (t^2 M_0 \widehat{S} M_0)^{1/2}) M_0 \widehat{P}. \tag{3.16}$$

Доказательство. Пусть $\widehat{\eta} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ и $\widehat{\xi}(\tau) = \widetilde{\Lambda}(\tau)\widehat{\eta}$. Тогда $M^{-1}\widehat{\xi}(\tau) \in \mathfrak{N}$, $\widehat{\xi}(\tau) \in \widehat{\mathfrak{N}}$, и $M^{-1}\widehat{\xi}(\tau)$ является решением задачи Коши

$$\frac{d^2}{d\tau^2} M^{-1}\widehat{\xi}(\tau) = -t^2 S M^{-1} \widehat{\xi}(\tau), \quad M^{-1}\widehat{\xi}|_{\tau=0} = PM^*\widehat{\eta}, \quad \left(\frac{d}{d\tau} M^{-1}\widehat{\xi} \right) \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Используем тождества (3.10) и $SM^{-1}\widehat{\xi}(\tau) = PM^*\widehat{S}\widehat{\xi}(\tau)$ (см. доказательство предложения 3.1). Тогда

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \widehat{\xi}(\tau) = -t^2 M_0^2 \widehat{S} \widehat{\xi}(\tau), \quad \widehat{\xi}(0) = M_0^2 \widehat{P} \widehat{\eta}, \quad \left(\frac{d}{d\tau} \widehat{\xi} \right) \Big|_{\tau=0} = 0,$$

что равносильно задаче

$$\frac{d^2}{d\tau^2} M_0^{-1}\widehat{\xi}(\tau) = -t^2 M_0 \widehat{S} M_0 (M_0^{-1}\widehat{\xi}(\tau)), \quad M_0^{-1}\widehat{\xi}(0) = M_0 \widehat{P} \widehat{\eta}, \quad \left(\frac{d}{d\tau} M_0^{-1}\widehat{\xi} \right) \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Следовательно, $M_0^{-1}\widehat{\xi}(\tau) = \cos(\tau(t^2 M_0 \widehat{S} M_0)^{1/2}) M_0 \widehat{P} \widehat{\eta}$, откуда вытекает (3.16). •

Из оценки (2.14) с учетом (1.10) получаем

$$\| \cos(\tau A(t)^{1/2}) P - \cos(\tau (t^2 S)^{1/2} P) P \|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \le 2C_1|t| + C_4|\tau| t^2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad |t| \le t^0.$$

Отсюда непосредственно следует оценка

$$\|M\cos(\tau A(t)^{1/2})PM^* - M\cos(\tau(t^2S)^{1/2}P)PM^*\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}} \le \|M\|^2(2C_1|t| + C_4|\tau|t^2), \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad |t|\le t^0. \tag{3.17}$$

Учитывая тождество (3.10) и предложение 3.3, перепишем неравенство (3.17) в виде

$$\begin{aligned}&\|M\cos(\tau A(t)^{1/2})M^{-1}M_0^2\widehat{P} - M_0\cos(\tau(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0\widehat{P}\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}}\\ &\le \|M\|^2\left(2C_1|t| + C_4|\tau|t^2\right), \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad |t|\le t^0.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Домножая операторы под знаком нормы в (3.18) справа на $M_0^{-2}\widehat{P}$, получаем

$$\begin{aligned}&\|M\cos(\tau A(t)^{1/2})M^{-1}\widehat{P} - M_0\cos(\tau(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0^{-1}\widehat{P}\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}}\\ &\le \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\left(2C_1|t| + C_4|\tau|t^2\right), \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad |t|\le t^0.\end{aligned} \tag{3.19}$$

3.5. Аппроксимация сглаженного окаймленного оператора $\cos(\tau\varepsilon^{-1}A(t)^{1/2})$. Заменим теперь в (3.19) τ на $\tau\varepsilon^{-1}$ и домножим получившийся оператор на $\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\widehat{P}$. Тогда

$$\begin{aligned}&\|\left(M\cos(\tau\varepsilon^{-1}A(t)^{1/2})M^{-1}\widehat{P} - M_0\cos(\tau\varepsilon^{-1}(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0^{-1}\widehat{P}\right)\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\widehat{P}\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}}\\ &\le \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\left(2C_1|t| + C_4|\tau|\varepsilon^{-1}t^2\right)\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\\ &\le \|M\|^2\|M^{-1}\|^2(2C_1 + C_4|\tau|)\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon>0, \quad |t|\le t^0.\end{aligned}$$

Тем самым, установлена следующая теорема.

Теорема 3.4. *Пусть $A(t)$ и $\widehat{A}(t)$ связаны соотношением* (3.1). *Пусть $\widehat{S}$ — росток оператора $\widehat{A}(t)$, а M_0 — оператор* (3.7). *Тогда выполнена оценка*

$$\begin{aligned}&\|\left(M\cos(\tau\varepsilon^{-1}A(t)^{1/2})M^{-1} - M_0\cos(\tau\varepsilon^{-1}(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0^{-1}\widehat{P}\right)\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\widehat{P}\|_{\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}}\\ &\le \|M\|^2\|M^{-1}\|^2(2C_1 + C_4|\tau|)\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon>0, \quad |t|\le t^0.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь величина t^0 определена в (1.2), *а постоянные C_1 и C_4 определены в* (1.12), (2.13).

Глава 2. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

В настоящей главе (§4–6) мы описываем класс матричных ДО второго порядка, допускающих факторизацию вида $\mathcal{A} = \mathcal{X}^*\mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — однородный ДО первого порядка. Этот класс был выделен и изучен в [BSu1,2]. В §4 приводится подробное описание рассматриваемого класса периодических операторов; вводится преобразование Гельфанда. В §5 приведено разложение операторов $\mathcal{A}$ в прямой интеграл. В §6 определяются эффективные характеристики периодических ДО. Более подробное изложение данного материала можно найти в [BSu2, гл. 2].

§4. Факторизованные периодические дифференциальные операторы второго порядка

4.1. Факторизованные операторы второго порядка. Пусть $b(\mathbf{D}) : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ — однородный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами. *Всегда считаем, что* $m \geq n$. Фиксируем ортонормированные базисы $\widetilde{\mathbf{e}}_1,\dots,\widetilde{\mathbf{e}}_n$ в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_m$ — в $\mathbb{C}^m$ и $\mathbf{e}'_1,\dots,\mathbf{e}'_d$ — в $\mathbb{R}^d$. Тогда оператору $b(\mathbf{D})$ отвечает *символ* — $(m\times n)$-матрица $b(\boldsymbol{\xi})$, которая является линейной однородной функцией от $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d$. Предположим, что

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{4.1}$$

Условие (4.1) равносильно тому, что при некоторых положительных α_0,α_1 выполнены неравенства

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad |\boldsymbol{\theta}| = 1, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < \infty. \tag{4.2}$$

Пусть $(n\times n)$-матрица-функция $f(\mathbf{x})$ и $(m\times m)$-матрица-функция $h(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, ограничены и ограниченно обратимы:

$$f,\ f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad h,\ h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{4.3}$$

Рассмотрим ДО

$$\mathcal{X} := h b(\mathbf{D}) f : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m), \tag{4.4}$$

$$\operatorname{Dom}\mathcal{X} := \{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) :\ f\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\}. \tag{4.5}$$

Оператор (4.4) замкнут на области определения (4.5). Самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}(g,f) := \mathcal{X}^*\mathcal{X}$ порождается замкнутой квадратичной формой $a[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)}$, $\mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}$. Формально

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(g,f) = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}), \quad g(\mathbf{x}) := h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x}). \tag{4.6}$$

Используя преобразование Фурье и (4.2), (4.3), легко проверить, что

$$c_0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(f\mathbf{u})|^2\, d\mathbf{x} \leq a[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leq c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(f\mathbf{u})|^2\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X},$$

$$c_0 = \alpha_0 \|h^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}, \quad c_1 = \alpha_1 \|h\|^2_{L_\infty}. \tag{4.7}$$

4.2. Решетки Γ и $\widetilde{\Gamma}$. В дальнейшем функции f, h считаются *периодическими относительно некоторой решетки* $\Gamma\subset\mathbb{R}^d$. Пусть $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d\in\mathbb{R}^d$ — базис в $\mathbb{R}^d$, порождающий решетку Γ:

$$\Gamma = \{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d :\ \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d \nu^j \mathbf{a}_j, \quad \nu^j \in \mathbb{Z}\},$$

и пусть Ω — (элементарная) ячейка решетки Γ:

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} \tau^j \mathbf{a}_j, \quad 0 < \tau^j < 1\}. \tag{4.8}$$

Двойственный по отношению к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$ базис $\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^d$ в $\mathbb{R}^d$ определяется из соотношений $\langle \mathbf{b}^i, \mathbf{a}_j \rangle = 2\pi \delta^i_j$. Этот базис порождает *решетку* $\widetilde{\Gamma}$, *двойственную к решетке* Γ:

$$\widetilde{\Gamma} = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{d} \mu_i \mathbf{b}^i, \quad \mu_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Ячейку решетки $\widetilde{\Gamma}$ можно определить по аналогии с (4.8). Удобнее, однако, обозначить через $\widetilde{\Omega}$ *зону Бриллюэна*

$$\widetilde{\Omega} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : \ |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|, \quad 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}\}.$$

Как и ячейка, область $\widetilde{\Omega}$ является *фундаментальной* для $\widetilde{\Gamma}$. Будем пользоваться обозначениями $|\Omega| = \operatorname{mes} \Omega$, $|\widetilde{\Omega}| = \operatorname{mes} \widetilde{\Omega}$ и отметим, что $|\Omega|\,|\widetilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Пусть r_0 — *радиус шара, вписанного в* $\operatorname{clos} \widetilde{\Omega}$. Отметим, что

$$|\mathbf{b} + \mathbf{k}| \geq r_0, \quad 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}. \tag{4.9}$$

Введем обозначение $\mathcal{B}(r) = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : \ |\mathbf{k}| \leq r\}$.

С решеткой Γ связано дискретное преобразование Фурье

$$v(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} \hat{v}_{\mathbf{b}} \exp(i \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{4.10}$$

которое унитарно отображает $l_2(\widetilde{\Gamma})$ на $L_2(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |\hat{v}_{\mathbf{b}}|^2.$$

Ниже через $\widetilde{H}^1(\Omega)$ *обозначается подпространство тех функций из* $H^1(\Omega)$, Γ-*периодическое продолжение которых на* $\mathbb{R}^d$ *принадлежит* $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

4.3. Преобразование Гельфанда $\mathcal{U}$ первоначально определяется на функциях класса Шварца $\mathcal{S}$ формулой

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{v})(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma} \exp(-i \langle \mathbf{k}, \mathbf{x} + \mathbf{a} \rangle) \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{a}),$$
$$\mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}.$$

При этом
$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}}\int\limits_{\Omega} |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{k} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}, \quad \widetilde{\mathbf{v}} = \mathcal{U}\mathbf{v},$$

и $\mathcal{U}$ продолжается по непрерывности до унитарного отображения

$$\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\,d\mathbf{k} =: \mathcal{K}. \tag{4.11}$$

Включение $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ равносильно тому, что $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot) \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ при п. в. $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и
$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}}\int\limits_{\Omega} \left(|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 + |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 \right)\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ под действием $\mathcal{U}$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$ из (4.11). Действие оператора $b(\mathbf{D})$ на $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ на $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot) \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

§5. Разложение оператора $\mathcal{A}$ в прямой интеграл

5.1. Формы $a(\mathbf{k})$ и операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Положим $\mathfrak{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$, и рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, задаваемый на области определения
$$\mathfrak{d} := \operatorname{Dom} \mathcal{X}(\mathbf{k}) = \{\mathbf{u} \in \mathfrak{H} : \ f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)\}$$

формулой $\mathcal{X}(\mathbf{k}) = hb(\mathbf{D}+\mathbf{k})f$. Самосопряженный оператор

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) := \mathcal{X}(\mathbf{k})^*\mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d,$$

порождается замкнутой квадратичной формой

$$a(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}.$$

Нетрудно проверить (см. [BSu2, гл. 2, (2.6)]), что

$$c_0 \int\limits_{\Omega} |(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}|^2\,d\mathbf{x} \le a(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \le c_1 \int\limits_{\Omega} |(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}|^2\,d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} = f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n), \tag{5.1}$$

где c_0, c_1 определены в (4.7). Из (5.1) и компактности вложения $\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ в $\mathfrak{H}$ следует, что спектр $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ дискретен. Отметим также, что *резольвента оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ компактна и непрерывно (по операторной норме) зависит от $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$.*

Пусть
$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} \mathcal{A}(0) = \operatorname{Ker} \mathcal{X}(0). \tag{5.2}$$

Соотношения (5.1) при $\mathbf{k} = 0$ показывают, что

$$\mathfrak{N} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \ f\mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \quad \dim \mathfrak{N} = n. \tag{5.3}$$

5.2. Зонные функции. Обозначим через

$$E_1(\mathbf{k}) \le E_2(\mathbf{k}) \le \ldots \le E_j(\mathbf{k}) \le \ldots, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{5.4}$$

последовательные (с учетом кратностей) собственные значения оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. *Зонные функции $E_j(\mathbf{k})$ непрерывны и $\widetilde{\Gamma}$-периодичны.*

Как показано в [BSu2, гл. 2, п. 2.2] (на основании простых вариационных соображений), зонные функции удовлетворяют следующим оценкам

$$E_j(\mathbf{k}) \ge c_* |\mathbf{k}|^2, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}, \tag{5.5}$$

$$E_{n+1}(\mathbf{k}) \ge c_* r_0^2, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}, \tag{5.6}$$

$$E_{n+1}(0) \ge 4 c_* r_0^2. \tag{5.7}$$

Здесь

$$c_* = \alpha_0 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} \|h^{-1}\|_{L_\infty}^{-2}. \tag{5.8}$$

5.3. Прямой интеграл для оператора $\mathcal{A}$. Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ позволяют провести частичную диагонализацию $\mathcal{A}$ в прямом интеграле $\mathcal{K}$ (см. (4.11)). Пусть $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathcal{U}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom} a$. Тогда

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \mathfrak{d} \ \text{ при п. в. } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{5.9}$$

$$a[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} a(\mathbf{k})[\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot), \widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot)]\, d\mathbf{k}. \tag{5.10}$$

Обратно, если для $\widetilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{K}$ выполнено (5.9) и интеграл в (5.10) конечен, то $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom} a$ и выполнено (5.10). Сказанное означает, что действие оператора $\mathcal{A}$ переходит в прямом интеграле $\mathcal{K}$ в послойное умножение на оператор-функцию $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$. Все это можно кратко записать в виде

$$\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{A}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{5.11}$$

Из (5.11) следует, что *спектр оператора $\mathcal{A}$ совпадает с объединением отрезков (спектральных зон), являющихся образами зонных функций* (5.4).

Из (5.2), (5.3) видно, что

$$\min_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d} E_j(\mathbf{k}) = E_j(0) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

а следовательно, нижний край спектра оператора $\mathcal{A}$ совпадает с точкой $\lambda_0 = 0$: $\inf \operatorname{spec} \mathcal{A} = 0$. Первые n спектральных зон оператора $\mathcal{A}$ перекрываются и имеют общий нижний край $\lambda_0 = 0$, а $(n+1)$-ая зона отделена от нуля (см. (5.6)).

5.4. Включение операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ в схему §1. Для $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ положим $\mathbf{k} = t\theta$, $t = |\mathbf{k}|$, $|\theta| = 1$, и за параметр возмущения примем t. При этом все построения станут зависеть от дополнительного параметра θ, что часто будет учитываться в обозначениях.

Мы будем применять схему §1 гл. 1, полагая $\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$. Роль оператора $X(t)$ играет оператор $X(t,\theta) = \mathcal{X}(t\theta) = hb(\mathbf{D}+t\theta)f$, $\operatorname{Dom} X(t,\theta) = \mathfrak{d}$. При этом выполнено $X(t,\theta) = X_0 + tX_1(\theta)$, где $X_0 = \mathcal{X}(0) = hb(\mathbf{D})f$, $\operatorname{Dom} X_0 = \mathfrak{d}$, и $X_1(\theta) = hb(\theta)f$. Наконец, роль оператора $A(t)$ играет $A(t,\theta) = \mathcal{A}(t\theta)$. При этом $A(t,\theta) = X(t,\theta)^* X(t,\theta)$. В соответствии с (5.2), (5.3), $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} X_0 = \operatorname{Ker} \mathcal{X}(0)$, $\dim \mathfrak{N} = n$. Соотношение $m \geq n$ обеспечивает выполнение условия $n \leq n_*$ (см. [BSu2, гл. 2, § 3]).

В согласии с (5.7), расстояние d^0 от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$, равное значению $E_{n+1}(0)$, допускает оценку

$$d^0 \geq 4c_* r_0^2. \tag{5.12}$$

Здесь c_* — постоянная (5.8). В п. 1.1 требовалось выбрать число $\delta < d^0/8$. С учетом (5.12) мы фиксируем δ:

$$\delta = c_* r_0^2/4 = (r_0/2)^2 \alpha_0 \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty} \|h^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}. \tag{5.13}$$

Далее, с учетом (4.2) для оператора $X_1(\theta) = hb(\theta)f$ справедлива оценка

$$\|X_1(\theta)\| \leq \alpha_1^{1/2} \|f\|_{L_\infty} \|h\|_{L_\infty}. \tag{5.14}$$

Это позволяет в качестве t^0 выбрать (см. (1.2)) не число $\delta^{1/2}\|X_1(\theta)\|^{-1}$, но меньшее число, не зависящее от θ. Именно, положим

$$t^0 = \delta^{1/2} \alpha_1^{-1/2} \|f\|^{-1}_{L_\infty} \|h\|^{-1}_{L_\infty} = (r_0/2) \alpha_0^{1/2} \alpha_1^{-1/2} \|f\|^{-1}_{L_\infty} \|f^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|h\|^{-1}_{L_\infty} \|h^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{5.15}$$

Отметим, что $t^0 \leq r_0/2$. Таким образом, $\mathcal{B}(t^0) \subset \mathcal{B}(r_0/2) \subset \widetilde{\Omega}$. Существенно, что величины c_*, t^0 (см. (5.8), (5.15)) не зависят от θ.

5.5. Невырожденность ростка для семейства $A(t,\theta)$. Ниже нам понадобится следующая оценка, которая получается на основании вариационных оценок (5.5) для собственных значений оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = A(t,\theta) \geq c_* t^2 I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}, \quad t = |\mathbf{k}|.$$

Следовательно, оператор $A(t,\theta)$ удовлетворяет условию 2.2 с постоянной c_*, определенной в (5.8). Отсюда следует невырожденность ростка $S(\theta)$ оператора $A(t,\theta)$ (который сейчас зависит от параметра θ):

$$S(\theta) \geq c_* I_{\mathfrak{N}}. \tag{5.16}$$

Важно, что росток невырожден равномерно по θ.

§6. Эффективная матрица и эффективный оператор

6.1. Росток оператора $A(t,\theta)$ в случае $f = \mathbf{1}_n$. В [BSu2, гл. 3, § 1] для операторного семейства $A(t,\theta)$ построен росток $S(\theta)$. Нам понадобится описание ростка в случае, когда $f = \mathbf{1}_n$. *В случае $f = \mathbf{1}_n$ условимся все объекты отмечать верхним значком* "$\frown$". Тогда для оператора

$$\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}(g) = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \tag{6.1}$$

семейство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ обозначается через $\widehat{A}(t,\theta)$. При $f = \mathbf{1}_n$ ядро (5.3) принимает вид

$$\widehat{\mathfrak{N}} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n): \ \ \mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \tag{6.2}$$

то есть, $\widehat{\mathfrak{N}}$ состоит из постоянных векторов. Тогда ортопроектор $\widehat{P}$ в пространстве $\mathfrak{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство (6.2) есть оператор усреднения по ячейке:

$$\widehat{P}\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{6.3}$$

Как показано в [BSu2, гл. 3, § 1], *спектральный росток $\widehat{S}(\theta)$ семейства $\widehat{A}(t,\theta)$, действующий в $\widehat{\mathfrak{N}}$, представим в виде*

$$\widehat{S}(\theta) = b(\theta)^* g^0 b(\theta), \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{6.4}$$

где $b(\theta)$ — символ оператора $b(\mathbf{D})$, а g^0 — так называемая *эффективная матрица*. Постоянная положительная $(m\times m)$-матрица g^0 определяется следующим образом. Пусть $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^m$, и пусть $\mathbf{v}_\mathbf{C} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ — (слабое) решение уравнения

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}) = 0. \tag{6.5}$$

Тогда

$$g^0\mathbf{C} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C}(\mathbf{x}) + \mathbf{C})\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^m. \tag{6.6}$$

6.2. Эффективный оператор. В силу (6.4) и однородности символа $b(\mathbf{k})$ имеем:

$$\widehat{S}(\mathbf{k}) := t^2 \widehat{S}(\theta) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{6.7}$$

Выражение (6.7) является символом ДО

$$\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}), \tag{6.8}$$

называемого *эффективным оператором* для оператора $\widehat{\mathcal{A}}$.

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ — операторное семейство в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, отвечающее эффективному оператору (6.8). Тогда $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ при периодических граничных условиях. Отсюда с учетом (6.3) и (6.7) вытекает тождество

$$\widehat{S}(\mathbf{k})\widehat{P} = \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\widehat{P}, \tag{6.9}$$

которое нам понадобится ниже.

6.3. Свойства эффективной матрицы. Отметим (см. [BSu2, гл. 3, теорема 1.5]), что для эффективной матрицы g^0 справедливы оценки (известные как вилка Фойгта-Рейсса)

$$\underline{g} \le g^0 \le \overline{g},$$

где

$$\overline{g} = |\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \underline{g} = \left(|\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} g(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

В случае $m = n$ (т. е., когда возможна факторизация оператора с квадратными матрицами) *всегда выполнено* $g^0 = \underline{g}$.

Глава 3. Пороговые аппроксимации операторных функций от периодических дифференциальных операторов

Эта глава посвящена получению пороговых аппроксимаций для оператор-функций (операторной экспоненты и косинуса) от периодических ДО. Эти аппроксимации получаются на основе абстрактных теорем из главы 1. В §7 содержатся требуемые аппроксимации для функций от операторов $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и зависящих от квазиимпульса $\mathbf{k}$. В §8 получены аналогичные факты для случая более общих операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. В §9, 10 из результатов, полученных соответственно в §7, 8 выводятся аппроксимации для оператор-функций от операторов $\widehat{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A}$, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Результаты для операторной экспоненты собраны в п. 7.1–7.3, 8.1, 8.2, 9.1, 10.1, а для операторного косинуса — в п. 7.4, 7.5, 8.3, 8.4, 9.2, 10.2.

§7. Аппроксимация сглаженных операторов $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}))$ и $\cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$

7.1. Аппроксимация сглаженного оператора $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}))$ при $|\mathbf{k}| \le \widehat{t}^0$. Рассмотрим оператор $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. При разложении в прямой интеграл оператору $\mathcal{H}_0$ отвечает семейство операторов $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Оператор $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ задается дифференциальным выражением $|\mathbf{D}+\mathbf{k}|^2$ при периодических граничных условиях. Введем обозначение

$$\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon) := \varepsilon^2(\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I)^{-1}. \tag{7.1}$$

Ясно, что выполнены тождества

$$\begin{gathered} \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P} = \varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}\widehat{P}, \\ \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\widehat{P} = \varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\widehat{P}, \quad t = |\mathbf{k}|. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Применим теорему 2.6 к семейству операторов $\widehat{A}(t,\theta) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. Учтем, что в силу (6.7), (6.9) выполнено тождество

$$\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}t^2\widehat{S}(\theta)\widehat{P})\widehat{P} = \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}))\widehat{P}, \tag{7.3}$$

Остается реализовать значения постоянных. В случае $f = \mathbf{1}_n$, постоянные (5.8), (5.13), (5.15) принимают вид

$$\widehat{c}_* = \alpha_0\|h^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}, \tag{7.4}$$

$$\widehat{\delta} = (r_0/2)^2\alpha_0\|h^{-1}\|^{-2}_{L_\infty},$$

$$\widehat{t}^0 = (r_0/2)\alpha_0^{1/2}\alpha_1^{-1/2}\|h\|^{-1}_{L_\infty}\|h^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{7.5}$$

С учетом оценки

$$\|\widehat{X}_1(\theta)\| \le \alpha_1^{1/2}\|h\|_{L_\infty} \tag{7.6}$$

(см. (5.14) при $f = \mathbf{1}_n$), вместо точных значений постоянных (1.12), которые сейчас зависят от θ, примем завышенные значения

$$\widehat{C}_1 = \beta_1(2/r_0)\alpha_1^{1/2}\alpha_0^{-1/2}\|h\|_{L_\infty}\|h^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{7.7}$$

$$\widehat{C}_2 = \beta_2(2/r_0)\alpha_1^{3/2}\alpha_0^{-1/2}\|h\|^3_{L_\infty}\|h^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{7.8}$$

Применяя оценку (2.20), с учетом (7.2), (7.3) получаем:

$$\begin{aligned}&\| \Big(\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})) - \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}))\Big)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\le (2\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2|\tau|)\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon>0, \quad |\mathbf{k}|\le\widehat{t}^0.\end{aligned} \tag{7.9}$$

7.2. Аппроксимация сглаженного оператора $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}))$ **при** $|\mathbf{k}| > \widehat{t}^0$**.** Оценки оператора под знаком нормы в (7.9) при $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(\widehat{t}^0)$ грубые: каждый член оценивается по отдельности.

В силу (7.2) выполнено неравенство

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\widehat{P}\| \le \varepsilon^3(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \le \varepsilon^3(\widehat{t}^0)^{-3} \le \varepsilon(\widehat{t}^0)^{-3}, \quad 0<\varepsilon\le 1, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(\widehat{t}^0). \tag{7.10}$$

Отсюда вытекает оценка

$$\begin{aligned}&\| \Big(\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})) - \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}))\Big)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\le 2\varepsilon(\widehat{t}^0)^{-3}, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad 0<\varepsilon\le 1, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(\widehat{t}^0).\end{aligned} \tag{7.11}$$

Теперь из (7.9) и (7.11) вытекает следующая оценка

$$\begin{aligned}&\| \Big(\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})) - \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}))\Big)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\le (2\widehat{C}_1 + 2(\widehat{t}^0)^{-3} + \widehat{C}_2|\tau|)\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad 0<\varepsilon\le 1, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{7.12}$$

7.3. Устранение оператора $\widehat{P}$. Покажем теперь, что в операторе под знаком нормы в (7.12) можно заменить проектор $\widehat{P}$ на тождественный оператор в пределах допустимой погрешности. Для этого оценим норму оператора $\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}(I-\widehat{P})$. С помощью дискретного преобразования Фурье (см. (4.10)) действие оператора $\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)$ на периодическую функцию $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ переходит в умножение коэффициентов Фурье $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}$, $\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}$, на символ $\varepsilon^2(|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-1}$. Оператор $I-\widehat{P}$ аннулирует нулевой коэффициент Фурье $\hat{\mathbf{v}}_0$. Поэтому

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \max_{0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \varepsilon^3(|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \le \varepsilon^3 r_0^{-3}, \quad \varepsilon>0, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{7.13}$$

Мы воспользовались здесь оценкой (4.9). Следовательно,

$$\begin{gathered}\left\| \left(\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})) - \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}))\right)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}(I-\widehat{P})\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \le 2\varepsilon r_0^{-3}, \\ \tau\in\mathbb{R}, \quad 0<\varepsilon\le 1, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{gathered} \tag{7.14}$$

Теперь из (7.12), (7.14) вытекает следующий результат.

Теорема 7.1. *При $\tau\in\mathbb{R}$, $0<\varepsilon\le 1$, $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\left\| \left(\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})) - \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}))\right)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \le (\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2|\tau|)\varepsilon, \tag{7.15}$$

где

$$\mathcal{C}_1 = 2\widehat{C}_1 + 2(\widehat{t}^0)^{-3} + 2r_0^{-3}, \quad \mathcal{C}_2 = \widehat{C}_2. \tag{7.16}$$

Оператор $\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)$ задан формулой (7.1), величина $\widehat{t}^0$ определена в (7.5), а постоянные $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$ определены в (7.7), (7.8).

7.4. Аппроксимация сглаженного оператора $\cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$ при $|\mathbf{k}|\le\widehat{t}^0$. Применим теорему 2.7 к семейству операторов $\widehat{A}(t,\theta)=\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. По аналогии с (7.3), в силу (6.7), (6.9), выполнено тождество

$$\cos(\tau\varepsilon^{-1}(t^2\widehat{S}(\theta))^{1/2}\widehat{P})\widehat{P} = \cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2})\widehat{P}. \tag{7.17}$$

Остается реализовать значения постоянных C_3 и C_4. Из (1.14) и оценки (7.6) видно, что вместо точного значения постоянной (1.14) (которое сейчас зависит от θ) удобно принять значение

$$\widehat{C}_3 = (1+\beta_2)\alpha_1\|h\|^2_{L_\infty}. \tag{7.18}$$

Вместо точного значения постоянной (2.13) выберем значение

$$\widehat{C}_4 = \widehat{C}_1\widehat{C}_3^{1/2} + \widehat{C}_1\alpha_1^{1/2}\|h\|_{L_\infty} + \frac{1}{2}\widehat{C}_2(\widehat{c}_*)^{-1/2}.$$

С учетом (7.4), (7.7), (7.8), (7.18), получаем

$$\widehat{C}_4 = 2\beta_1(1+(1+\beta_2)^{1/2})r_0^{-1}\alpha_1\alpha_0^{-1/2}\|h\|^2_{L_\infty}\|h^{-1}\|_{L_\infty} + \beta_2 r_0^{-1}\alpha_1^{3/2}\alpha_0^{-1}\|h\|^3_{L_\infty}\|h^{-1}\|^2_{L_\infty}. \tag{7.19}$$

Применяя оценку (2.23), с учетом (7.2) и (7.17) получаем:

$$\begin{aligned}&\| \left(\cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) - \cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2})\right) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ &\le (2\widehat{C}_1 + \widehat{C}_4|\tau|)\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon>0, \quad |\mathbf{k}|\le \widehat{t}^0.\end{aligned} \tag{7.20}$$

7.5. Аппроксимация сглаженного оператора $\cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$ при $|\mathbf{k}| > \widehat{t}^0$. По аналогии с (7.11) имеем:

$$\begin{aligned}&\| \left(\cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) - \cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2})\right) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ &\le 2\varepsilon^2(\widehat{t}^0)^{-2} \le 2\varepsilon(\widehat{t}^0)^{-2}, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad 0<\varepsilon\le 1, \quad \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(\widehat{t}^0).\end{aligned} \tag{7.21}$$

Теперь из (7.20) и (7.21) вытекает следующая оценка

$$\begin{aligned}&\| \left(\cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) - \cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2})\right) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ &\le (2\widehat{C}_1 + 2(\widehat{t}^0)^{-2} + \widehat{C}_4|\tau|)\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad 0<\varepsilon\le 1, \quad \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{7.22}$$

Аналогично (7.14), имеем:

$$\begin{aligned}\| \left(\cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) - \cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2})\right) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \le 2\varepsilon r_0^{-2}, \\ \tau\in\mathbb{R}, \quad 0<\varepsilon\le 1, \quad \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{7.23}$$

В итоге, оценки (7.22) и (7.23) приводят к следующему утверждению.

Теорема 7.2. *При $\tau\in\mathbb{R}$, $0<\varepsilon\le 1$, $\mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\| \left(\cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) - \cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2})\right) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \le (\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4|\tau|)\varepsilon, \tag{7.24}$$

где

$$\mathcal{C}_3 = 2\widehat{C}_1 + 2(\widehat{t}^0)^{-2} + 2r_0^{-2}, \quad \mathcal{C}_4 = \widehat{C}_4. \tag{7.25}$$

Оператор $\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)$ задан формулой (7.1), величина $\widehat{t}^0$ определена в (7.5), а постоянные $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_4$ определены в (7.7), (7.19).

§8. Аппроксимация сглаженных окаймленных операторов $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k}))$ и $\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$

8.1. Аппроксимация сглаженного окаймленного оператора $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k}))$ при $|\mathbf{k}|\le t^0$. Экспонента для оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = f^*\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})f$ изучается на основании схемы § 3. Сейчас $\mathfrak{H} = \widehat{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, роль $A(t)$ играет оператор $A(t,\theta) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$, роль $\widehat{A}(t)$ играет $\widehat{A}(t,\theta) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. В качестве изоморфизма M выступает оператор умножения на матрицу-функцию $f(\mathbf{x})$. Оператор Q (см. (3.2)) является оператором умножения на матрицу-функцию

$$Q(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}. \tag{8.1}$$

Блок оператора Q в ядре $\widehat{\mathfrak{N}}$ (см. (6.2)) есть оператор умножения на постоянную матрицу

$$\overline{Q} = (\underline{ff^*})^{-1} = |\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}\, d\mathbf{x}.$$

Далее, M_0 (см. (3.7)) есть оператор умножения на постоянную матрицу

$$f_0 = (\overline{Q})^{-1/2} = (\underline{ff^*})^{1/2}. \tag{8.2}$$

Постоянная t^0 задается равенством (5.15). С учетом (5.13), (5.14) вместо точных значений постоянных (1.12) (которые сейчас зависят от ϑ) примем завышенные значения

$$C_1 = 2\beta_1 r_0^{-1} \alpha_1^{1/2} \alpha_0^{-1/2} \|h\|_{L_\infty} \|h^{-1}\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{8.3}$$

$$C_2 = 2\beta_2 r_0^{-1} \alpha_1^{3/2} \alpha_0^{-1/2} \|h\|^3_{L_\infty} \|h^{-1}\|_{L_\infty} \|f\|^3_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{8.4}$$

Положим

$$\mathcal{A}^0 := f_0^* \widehat{\mathcal{A}}^0 f_0 = f_0^* b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0. \tag{8.5}$$

Пусть $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ — соответствующее операторное семейство в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Тогда $\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = f_0 \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) f_0$.

Применим неравенство (3.14) к оператору $A(t, \vartheta) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$. Учтем, что в силу (6.7), (6.9) выполнено тождество

$$f_0 \exp(-i\tau\varepsilon^{-2} t^2 f_0 \widehat{S}(\vartheta) f_0) f_0^{-1} \widehat{P} = f_0 \exp(-i\tau\varepsilon^{-2} \mathcal{A}^0(\mathbf{k})) f_0^{-1} \widehat{P}.$$

Учитывая также (7.2), получаем

$$\begin{aligned} &\| \left(f \exp(-i\tau\varepsilon^{-2} \mathcal{A}(\mathbf{k})) f^{-1} - f_0 \exp(-i\tau\varepsilon^{-2} \mathcal{A}^0(\mathbf{k})) f_0^{-1} \right) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \widehat{P} \|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \\ &\quad \le \|f\|^2_{L_\infty} \|f^{-1}\|^2_{L_\infty} (2C_1 + C_2|\tau|)\varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0, \quad |\mathbf{k}| \le t^0. \end{aligned} \tag{8.6}$$

8.2. Аппроксимация сглаженного окаймленного оператора $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k}))$ при $|\mathbf{k}| > t^0$. Аналогично (7.10), имеем

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \widehat{P}\| \le \varepsilon^3 (t^0)^{-3} \le \varepsilon (t^0)^{-3}, \quad 0 < \varepsilon \le 1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(t^0).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\| \left(f \exp(-i\tau\varepsilon^{-2} \mathcal{A}(\mathbf{k})) f^{-1} - f_0 \exp(-i\tau\varepsilon^{-2} \mathcal{A}^0(\mathbf{k})) f_0^{-1} \right) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2} \widehat{P} \|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \\ &\quad \le (\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} + \|f_0\|_{L_\infty} \|f_0^{-1}\|_{L_\infty}) (t^0)^{-3} \varepsilon \\ &\quad \le 2\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} (t^0)^{-3} \varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(t^0). \end{aligned} \tag{8.7}$$

Мы использовали здесь элементарные неравенства $\|f_0\|_{L_\infty} \le \|f\|_{L_\infty}$, $\|f_0^{-1}\|_{L_\infty} \le \|f^{-1}\|_{L_\infty}$.

Теперь из (8.6) и (8.7) вытекает следующая оценка

$$\begin{gathered}\| \left(f \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k}))f^{-1} - f_0 \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k}))f_0^{-1}\right) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ \le (2\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}C_1 + 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(t^0)^{-3} + \|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}C_2|\tau|)\varepsilon, \\ \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{gathered} \tag{8.8}$$

С учетом (7.13), выполнена оценка

$$\begin{gathered}\| \left(f \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k}))f^{-1} - f_0 \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k}))f_0^{-1}\right) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ \le 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}r_0^{-3}\varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{gathered} \tag{8.9}$$

Из (8.8) и (8.9) получаем следующий результат.

Теорема 8.1. *При $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \le 1$, $\mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\begin{gathered}\| \left(f \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k}))f^{-1} - f_0 \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k}))f_0^{-1}\right) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ \le (\mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_6|\tau|)\varepsilon,\end{gathered} \tag{8.10}$$

где

$$\begin{gathered}\mathcal{C}_5 = 2\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}C_1 + 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}((t^0)^{-3} + r_0^{-3}), \\ \mathcal{C}_6 = \|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}C_2.\end{gathered} \tag{8.11}$$

Оператор $\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)$ задан формулой (7.1)*, величина t^0 определена в* (5.15)*, а постоянные C_1, C_2 определены в* (8.3), (8.4).

8.3. Аппроксимация сглаженного окаймленного оператора $\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$ при $|\mathbf{k}| \le t^0$. Оператор $\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$ изучается на основании схемы § 3 (см. п. 3.5).

Реализуем постоянные C_3, C_4. С учетом (5.14) вместо точного значения постоянной (1.14) примем

$$C_3 = (1+\beta_2)\alpha_1\|f\|^2_{L_\infty}\|h\|^2_{L_\infty}. \tag{8.12}$$

Вместо точного значения постоянной (2.13) примем

$$C_4 = C_1C_3^{1/2} + C_1\alpha_1^{1/2}\|f\|_{L_\infty}\|h\|_{L_\infty} + \frac{1}{2}C_2c_*^{-1/2}.$$

С учетом (5.8), (8.3), (8.4), (8.12) получаем

$$\begin{gathered}C_4 = 2\beta_1(1+(1+\beta_2)^{1/2})r_0^{-1}\alpha_1\alpha_0^{-1/2}\|h\|^2_{L_\infty}\|h^{-1}\|_{L_\infty}\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty} \\ +\beta_2r_0^{-1}\alpha_1^{3/2}\alpha_0^{-1}\|h\|^3_{L_\infty}\|h^{-1}\|^2_{L_\infty}\|f\|^3_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}.\end{gathered} \tag{8.13}$$

Применим неравенство (3.20) к оператору $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Учтем, что в силу (6.7), (6.9) выполнено тождество

$$f_0\cos(\tau\varepsilon^{-1}(t^2f_0\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})f_0)^{1/2})f_0^{-1}\widehat{P} = f_0\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\widehat{P}.$$

Учитывая также (7.2), получаем

$$\begin{gathered}\| \left(f\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})f^{-1} - f_0\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\right)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ \le \|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}(2C_1 + C_4|\tau|)\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon>0, \quad |\mathbf{k}|\le t^0.\end{gathered} \tag{8.14}$$

8.4. Аппроксимация сглаженного окаймленного оператора $\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$ при $|\mathbf{k}| > t^0$. Аналогично (8.7), имеем

$$\begin{gathered}\| \left(f\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})f^{-1} - f_0\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\right)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ \le 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(t^0)^{-2}\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad 0<\varepsilon\le 1, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).\end{gathered} \tag{8.15}$$

Теперь из (8.14) и (8.15) вытекает следующая оценка

$$\begin{gathered}\| \left(f\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})f^{-1} - f_0\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\right)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ \le (2\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}C_1 + 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(t^0)^{-2} + \|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}C_4|\tau|)\varepsilon, \\ \tau\in\mathbb{R}, \quad 0<\varepsilon\le 1, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{gathered} \tag{8.16}$$

Аналогично (8.9), имеем:

$$\begin{gathered}\| \left(f\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})f^{-1} - f_0\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\right)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ \le 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}r_0^{-2}\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad 0<\varepsilon\le 1, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{gathered} \tag{8.17}$$

Оценки (8.16) и (8.17) приводят к следующему утверждению.

Теорема 8.2. *При $\tau\in\mathbb{R}$, $0<\varepsilon\le 1$, $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\| \left(f\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})f^{-1} - f_0\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\right)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \le (\mathcal{C}_7 + \mathcal{C}_8|\tau|)\varepsilon, \tag{8.18}$$

где

$$\begin{gathered}\mathcal{C}_7 = 2\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}C_1 + 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}((t^0)^{-2} + r_0^{-2}), \\ \mathcal{C}_8 = \|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}C_4.\end{gathered} \tag{8.19}$$

Оператор $\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)$ задан формулой (7.1), величина t^0 определена в (5.15), а постоянные C_1, C_4 определены в (8.3), (8.13).

§9. Аппроксимация сглаженных операторов $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}})$ и $\cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}^{1/2})$

9.1. Аппроксимация сглаженного оператора $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}})$. Пусть $\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ — оператор, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ (см. (6.1)), и $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор (6.8). Напомним обозначение $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ и положим

$$\mathcal{R}(\varepsilon) := \varepsilon^2(\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1}. \tag{9.1}$$

Из разложения вида (5.11) для $\widehat{\mathcal{A}}$ следует разложение

$$\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}) = \mathcal{U}^{-1}\left(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}))\, d\mathbf{k}\right)\mathcal{U}.$$

Аналогичное разложение справедливо для оператора $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0)$, а также для разности экспонент. Оператор (9.1) раскладывается в прямой интеграл по операторам (7.1):

$$\mathcal{R}(\varepsilon) = \mathcal{U}^{-1}\left(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\, d\mathbf{k}\right)\mathcal{U}.$$

Из сказанного следует, что оператор $(\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}) - \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0))\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам, стоящим под знаком нормы в (7.15). Поскольку оценка (7.15) равномерна по параметру $\mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$, из теоремы 7.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9.1. *Пусть $\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ — оператор, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, и $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор. При $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \le 1$ выполнена оценка*

$$\| \left(\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}) - \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0)\right)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2|\tau|)\varepsilon. \tag{9.2}$$

Здесь оператор $\mathcal{R}(\varepsilon)$ определен в (9.1)*, а постоянные $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ определены в* (7.16).

9.2. Аппроксимация сглаженного оператора $\cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}^{1/2})$. Аналогично п. 9.1, оператор $\left(\cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}) - \cos(\tau\varepsilon^{-1}(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\right)\mathcal{R}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам, стоящим под знаком нормы в (7.24). Поэтому из теоремы 7.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9.2. *Пусть $\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ — оператор, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, и $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор. При $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \le 1$ выполнена оценка*

$$\| \left(\cos(\tau\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}) - \cos(\tau\varepsilon^{-1}(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\right)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le (\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4|\tau|)\varepsilon. \tag{9.3}$$

Здесь оператор $\mathcal{R}(\varepsilon)$ определен в (9.1)*, а постоянные $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ определены в* (7.25).

§10. Аппроксимация сглаженных окаймленных операторов $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A})$ и $\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2})$

10.1. Аппроксимация сглаженного окаймленного оператора $\exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A})$. Пусть $\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})^* \widehat{\mathcal{A}} f(\mathbf{x})$ — оператор, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ (см. (4.6)), и $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор (6.8) для $\widehat{\mathcal{A}}$. Пусть постоянная матрица f_0 определена в (8.2), и $\mathcal{A}^0 = f_0^* b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0$ (см. (8.5)). Аналогично § 9, используя разложение (5.11), убеждаемся, что оператор $\left(f \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}) f^{-1} - f_0 \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0) f_0^{-1}\right) \mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам, стоящим под знаком нормы в (8.10). Поэтому из теоремы 8.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 10.1. *Пусть* $\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x})$ *— оператор, действующий в* $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathcal{A}^0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0$, *где* g^0 *— эффективная матрица, а* $f_0 = (\underline{f f^*})^{1/2}$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \le 1$ *выполнена оценка*

$$\| \left(f \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}) f^{-1} - f_0 \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0) f_0^{-1}\right) \mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \le (\mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_6 |\tau|)\varepsilon. \tag{10.1}$$

Здесь оператор $\mathcal{R}(\varepsilon)$ *определен в* (9.1), *а постоянные* $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_6$ *определены в* (8.11).

10.2. Аппроксимация сглаженного окаймленного оператора $\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2})$. Оператор $\left(f \cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2}) f^{-1} - f_0 \cos(\tau\varepsilon^{-1}(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}\right) \mathcal{R}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам, стоящим под знаком нормы в (8.18). Поэтому из теоремы 8.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 10.2. *Пусть* $\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x})$ *— оператор, действующий в* $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathcal{A}^0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0$, *где* g^0 *— эффективная матрица, а* $f_0 = (\underline{f f^*})^{1/2}$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \le 1$ *выполнена оценка*

$$\| \left(f \cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2}) f^{-1} - f_0 \cos(\tau\varepsilon^{-1}(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}\right) \mathcal{R}(\varepsilon) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \le (\mathcal{C}_7 + \mathcal{C}_8 |\tau|)\varepsilon. \tag{10.2}$$

Здесь оператор $\mathcal{R}(\varepsilon)$ *определен в* (9.1), *а постоянные* $\mathcal{C}_7$, $\mathcal{C}_8$ *определены в* (8.19).

Глава 4. Задачи усреднения для нестационарных уравнений математической физики

Мы переходим к задачам усреднения в пределе малого периода для периодических ДО, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Изучается усреднение в задачах Коши для нестационарного уравнения Шредингера и для гиперболического уравнения. В этих уравнениях участвуют операторы $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, $\mathcal{A}_\varepsilon$ с быстро осциллирующими коэффициентами (см. (11.1), (11.2)). В §11 приведены постановки задач и описано масштабное преобразование. §12 посвящен усреднению операторной экспоненты $\exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon)$, $\exp(-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon)$, а §13 — усреднению операторного косинуса $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$. Здесь получены основные результаты работы в операторных терминах. Они выводятся с помощью масштабного преобразования из теорем главы 3. В §14, 15 с помощью "операторных" теорем получены основные результаты работы по усреднению задачи Коши для уравнения типа Шредингера (§14) и задачи Коши для гиперболического уравнения (§15). Здесь подробно рассмотрены различные варианты постановок задач.

§11. Постановка задач. Масштабное преобразование

11.1. Операторы $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, $\mathcal{A}_\varepsilon$. Постановка вопроса. Если $\psi(\mathbf{x})$ — какая-либо измеримая Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, условимся использовать обозначение $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. *Наш основной объект* — операторы $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon := \widehat{\mathcal{A}}(g^\varepsilon)$, $\mathcal{A}_\varepsilon := \mathcal{A}(g^\varepsilon, f^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ (см. п. 4.1), формально заданные дифференциальными выражениями

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon := b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{11.1}$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon := (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{11.2}$$

Коэффициенты операторов (11.1), (11.2) быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

Теория усреднений изучает вопрос о поведении решений уравнений математической физики с быстро осциллирующими коэффициентами. *Наша цель* — найти аппроксимации при малом ε по норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ (при фиксированном τ) решений задачи Коши для уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial \tau} = \mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon, \tag{11.3}$$

а также задачи Коши для гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial \tau^2} = -\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon. \tag{11.4}$$

Для этой цели мы изучаем операторные функции $\exp(-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon)$, $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, через которые можно записать решения соответствующих задач Коши. Мы "сглаживаем" эти оператор-функции и для сглаженных операторов получаем аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Нужные аппроксимации получены в § 12 и § 13. Результаты применяются к усреднению задачи Коши для уравнения Шредингера (см. § 14) и задачи Коши для гиперболического уравнения (см. § 15).

11.2. Масштабное преобразование. Пусть T_ε — *унитарный в* $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ *оператор масштабного преобразования*: $(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2}\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Тогда справедливо тождество

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathcal{A} T_\varepsilon.$$

Отсюда для оператор-функций от $\mathcal{A}_\varepsilon$ получаются следующие соотношения

$$\exp(-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon) = T_\varepsilon^* \exp(-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}) T_\varepsilon, \tag{11.5}$$

$$\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) = T_\varepsilon^* \cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2}) T_\varepsilon. \tag{11.6}$$

Аналогичные соотношения выполнены и для функций от $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$.

Применяя масштабное преобразование к резольвенте оператора $\mathcal{H}_0 = -\Delta$, получим

$$(\mathcal{H}_0 + I)^{-1} = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* (\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1} T_\varepsilon = T_\varepsilon^* \mathcal{R}(\varepsilon) T_\varepsilon. \tag{11.7}$$

Здесь использовано обозначение (9.1).

Наконец, если $\psi(\mathbf{x})$ — периодическая функция из $L_\infty(\mathbb{R}^d)$, то оператор $[\psi^\varepsilon]$ умножения на функцию $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ под действием масштабного преобразования перейдет в оператор $[\psi]$ умножения на $\psi(\mathbf{x})$:

$$[\psi^\varepsilon] = T_\varepsilon^* [\psi] T_\varepsilon. \tag{11.8}$$

§12. Усреднение операторной экспоненты $\exp(-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon)$

12.1. Аппроксимация сглаженного оператора $\exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon)$**.** Начнем с более простого оператора (11.1). Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор (6.8). Применяя (11.5) (для случая операторов $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0$), а также (11.7), убеждаемся, что оператор $\left(\exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon) - \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0)\right)(\mathcal{H}_0 + I)^{-3/2}$ унитарно эквивалентен оператору, стоящему под знаком нормы в (9.2). Тогда из теоремы 9.1 вытекает следующий результат.

Теорема 12.1. *Пусть* $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ *— оператор* (11.1) *и* $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ *— соответствующий эффективный оператор. Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *справедлива оценка*

$$\| \left(\exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon) - \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0)\right)(\mathcal{H}_0 + I)^{-3/2} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \le (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2|\tau|)\varepsilon. \tag{12.1}$$

Постоянные $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *определены в* (7.16) *и зависят лишь от величин* α_0, α_1 *из* (4.2), *от норм* $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Оператор $(\mathcal{H}_0 + I)^{3/2}$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства Соболева $H^3(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ на $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Действительно, для $\mathbf{u} \in H^3(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ выполнено

$$\|(\mathcal{H}_0 + I)^{3/2}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1)^3 |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} = \|\mathbf{u}\|^2_{H^3(\mathbb{R}^d)}, \tag{12.2}$$

где $\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Из (12.1) и (12.2) вытекает оценка

$$\| \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon) - \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0) \|_{H^3(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \le (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2|\tau|)\varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1. \tag{12.3}$$

Очевидно,

$$\| \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon) - \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \le 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \tag{12.4}$$

Интерполируя между (12.4) и (12.3), при $0 \le s \le 3$ получаем

$$\| \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon) - \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le 2^{1-s/3}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{s/3}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1. \tag{12.5}$$

Оценка (12.5) позволяет, в частности, считать параметр τ (время) большим, а именно, рассматривать значения $|\tau| = O(\varepsilon^{-\alpha})$ при $0 < \alpha < 1$.

Мы установили следующую теорему.

Теорема 12.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 12.1. *Тогда при* $0 \le s \le 3$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \le 1$ *справедлива оценка*

$$\| \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon) - \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le \widehat{\mathcal{C}}_s(\tau)\varepsilon^{s/3}, \tag{12.6}$$

где постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_s(\tau)$ *задана равенством*

$$\widehat{\mathcal{C}}_s(\tau) = 2^{1-s/3}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2|\tau|)^{s/3}. \tag{12.7}$$

В частности, при $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, *справедлива оценка*

$$\| \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon) - \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le \widehat{\mathcal{C}}_s(1)\varepsilon^{s(1-\alpha)/3}, \quad |\tau| = \varepsilon^{-\alpha}, \quad 0 < \varepsilon \le 1. \tag{12.8}$$

12.2. Аппроксимация сглаженного окаймленного оператора $\exp(-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon)$**.** Рассмотрим теперь общий случай оператора (11.2). Пусть матрица f_0 определена в (8.2), а оператор $\mathcal{A}^0$ — в (8.5). Применяя (11.5) (для случая операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{A}^0$), а также (11.7) и (11.8), видим, что оператор $\left(f^\varepsilon \exp(-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon)(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 \exp(-i\tau\mathcal{A}^0)f_0^{-1}\right)(\mathcal{H}_0 + I)^{-3/2}$ унитарно эквивалентен оператору, стоящему под знаком нормы в (10.1). Тогда из теоремы 10.1 вытекает следующий результат.

Теорема 12.3. *Пусть* $\mathcal{A}_\varepsilon$ *— оператор* (11.2). *Пусть матрица* f_0 *определена в* (8.2), *а* $\mathcal{A}^0$ *— оператор* (8.5). *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *справедлива оценка*

$$\| \left(f^\varepsilon \exp(-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon)(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 \exp(-i\tau\mathcal{A}^0)f_0^{-1}\right)(\mathcal{H}_0 + I)^{-3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le (\mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_6|\tau|)\varepsilon. \tag{12.9}$$

Постоянные $\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$ *определены в* (8.11) *и зависят лишь от величин* α_0, α_1 *из* (4.2), *от норм* $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Теперь из (12.9) и (12.2) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon \exp(-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon)(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 \exp(-i\tau\mathcal{A}^0)f_0^{-1}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le (\mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_6|\tau|)\varepsilon, \\ \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1. \end{aligned} \tag{12.10}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon \exp(-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon)(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 \exp(-i\tau\mathcal{A}^0)f_0^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}, \\ \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{12.11}$$

Интерполируя между (12.11) и (12.10), при $0 \le s \le 3$ получаем

$$\| f^\varepsilon \exp(-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon)(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 \exp(-i\tau \mathcal{A}^0) f_0^{-1} \|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$\le 2^{1-s/3} \|f\|_{L_\infty}^{1-s/3} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{1-s/3} (\mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_6|\tau|)^{s/3} \varepsilon^{s/3}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1.$$

Мы установили следующую теорему.

Теорема 12.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 12.3. *Тогда при* $0 \le s \le 3$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \le 1$ *справедлива оценка*

$$\| f^\varepsilon \exp(-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon)(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 \exp(-i\tau \mathcal{A}^0) f_0^{-1} \|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le \mathcal{C}_s(\tau)\varepsilon^{s/3}, \tag{12.12}$$

где постоянная $\mathcal{C}_s(\tau)$ *задана равенством*

$$\mathcal{C}_s(\tau) = 2^{1-s/3} \|f\|_{L_\infty}^{1-s/3} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{1-s/3} (\mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_6|\tau|)^{s/3}. \tag{12.13}$$

В частности, при $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \| f^\varepsilon \exp(-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon)(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 \exp(-i\tau \mathcal{A}^0) f_0^{-1} \|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le \mathcal{C}_s(1)\varepsilon^{s(1-\alpha)/3}, \\ |\tau| = \varepsilon^{-\alpha}, \quad 0 < \varepsilon \le 1. \end{aligned} \tag{12.14}$$

§13. Усреднение операторов $\cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ и $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$

13.1. Аппроксимация сглаженных операторов $\cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ **и** $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$**.** Пусть $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ — оператор (11.1). Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор (6.8). Из (11.6) (для случая операторов $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0$) и из (11.7) следует, что оператор $\left(\cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\right)(\mathcal{H}_0 + I)^{-1}$ унитарно эквивалентен оператору под знаком нормы в (9.3). Тогда из теоремы 9.2 вытекает следующий результат.

Теорема 13.1. *Пусть* $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ *— оператор* (11.1) *и* $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ *— соответствующий эффективный оператор. Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *справедлива оценка*

$$\| \left(\cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\right)(\mathcal{H}_0 + I)^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le (\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4|\tau|)\varepsilon. \tag{13.1}$$

Постоянные $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ *определены в* (7.25) *и зависят лишь от величин* α_0, α_1 *из* (4.2), *от норм* $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Аналогично (12.2), оператор $(\mathcal{H}_0 + I)$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ на $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а потому

$$\|\mathcal{H}_0 + I\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = 1. \tag{13.2}$$

Из (13.1) и (13.2) вытекает оценка

$$\| \cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le (\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4|\tau|)\varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1. \tag{13.3}$$

Очевидно,

$$\| \cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \le 2, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \tag{13.4}$$

Интерполируя между (13.4) и (13.3), при $0 \le s \le 2$ получаем

$$\| \cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \le 2^{1-s/2} (\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 |\tau|)^{s/2} \varepsilon^{s/2}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1. \tag{13.5}$$

Используя тождество

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) = \int\limits_0^\tau \cos(\tilde{\tau} \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})\, d\tilde{\tau},$$

и аналогичное тождество для оператора $\widehat{\mathcal{A}}^0$, из (13.5) получаем

$$\begin{aligned} &\| \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\le 2^{1-s/2} (1+s/2)^{-1} \mathcal{C}_4^{-1} (\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 |\tau|)^{1+s/2} \varepsilon^{s/2}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1. \end{aligned} \tag{13.6}$$

Отметим, что при больших значениях $|\tau|$ множитель при $\varepsilon^{s/2}$ в (13.5) есть $O(|\tau|^{s/2})$, а в (13.6) множитель растет как $O(|\tau|^{1+s/2})$.

Мы установили следующую теорему.

Теорема 13.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 13.1. *Тогда при* $0 \le s \le 2$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \le 1$ *справедливы оценки*

$$\| \cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \le \widehat{\mathfrak{C}}_s(\tau) \varepsilon^{s/2}, \tag{13.7}$$

$$\| \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \le \widehat{\mathfrak{C}}'_s(\tau) \varepsilon^{s/2}, \tag{13.8}$$

где постоянные $\widehat{\mathfrak{C}}_s(\tau)$, $\widehat{\mathfrak{C}}'_s(\tau)$ *заданы равенствами*

$$\widehat{\mathfrak{C}}_s(\tau) = 2^{1-s/2} (\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 |\tau|)^{s/2}, \quad \widehat{\mathfrak{C}}'_s(\tau) = \widehat{\mathfrak{C}}_s(\tau)(1+s/2)^{-1} (\mathcal{C}_3 \mathcal{C}_4^{-1} + |\tau|). \tag{13.9}$$

В частности, при $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \| \cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} &\le \widehat{\mathfrak{C}}_s(1) \varepsilon^{s(1-\alpha)/2}, \\ |\tau| = \varepsilon^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad &0 < \varepsilon \le 1, \end{aligned} \tag{13.10}$$

$$\begin{aligned} \| \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} &\le \widehat{\mathfrak{C}}'_s(1) \varepsilon^{s(1-\alpha)/2-\alpha}, \\ |\tau| = \varepsilon^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < \frac{s}{s+2}, \quad &0 < \varepsilon \le 1. \end{aligned} \tag{13.11}$$

13.2. Аппроксимация сглаженных окаймленных операторов $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ **и** $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$**.** Рассмотрим теперь общий случай оператора (11.2). Пусть матрица f_0 определена в (8.2), а оператор $\mathcal{A}^0$ — в (8.5). Применяя (11.6) (для случая операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{A}^0$), а также (11.7) и (11.8), убеждаемся, что оператор $\Big(f^\varepsilon\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0\cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\Big)(\mathcal{H}_0+I)^{-1}$ унитарно эквивалентен оператору, стоящему под знаком нормы в (10.2). Тогда из теоремы 10.2 вытекает следующий результат.

Теорема 13.3. *Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — оператор (11.2) и $\mathcal{A}^0$ — оператор (8.5). Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$ и $0<\varepsilon\le 1$ справедлива оценка*

$$\| \Big(f^\varepsilon\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0\cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\Big)(\mathcal{H}_0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le (\mathcal{C}_7+\mathcal{C}_8|\tau|)\varepsilon. \tag{13.12}$$

Постоянные $\mathcal{C}_7$, $\mathcal{C}_8$ определены в (8.19) и зависят лишь от величин α_0, α_1 из (4.2), от норм $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

Теперь из (13.12) и (13.2) вытекает оценка

$$\begin{aligned}\|f^\varepsilon\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0\cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\le (\mathcal{C}_7+\mathcal{C}_8|\tau|)\varepsilon,\\ \tau\in\mathbb{R},\quad 0<\varepsilon\le 1&.\end{aligned} \tag{13.13}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned}\|f^\varepsilon\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0\cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\le 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty},\\ \tau\in\mathbb{R},\quad \varepsilon>0&.\end{aligned} \tag{13.14}$$

Интерполируя между (13.14) и (13.13), при $0\le s\le 2$ получаем

$$\begin{aligned}&\|f^\varepsilon\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0\cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\quad\le 2^{1-s/2}\|f\|_{L_\infty}^{1-s/2}\|f^{-1}\|_{L_\infty}^{1-s/2}(\mathcal{C}_7+\mathcal{C}_8|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2},\quad \tau\in\mathbb{R},\quad 0<\varepsilon\le 1.\end{aligned}$$

Мы установили следующую теорему.

Теорема 13.4. *Пусть выполнены условия теоремы 13.3. Тогда при $0\le s\le 2$ и при $\tau\in\mathbb{R}$, $0<\varepsilon\le 1$ справедливы оценки*

$$\|f^\varepsilon\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0\cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le \mathfrak{C}_s(\tau)\varepsilon^{s/2},$$

$$\|f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \le \mathfrak{C}'_s(\tau)\varepsilon^{s/2},$$

где постоянные $\mathfrak{C}_s(\tau)$, $\mathfrak{C}'_s(\tau)$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_s(\tau) &= 2^{1-s/2}\|f\|_{L_\infty}^{1-s/2}\|f^{-1}\|_{L_\infty}^{1-s/2}(\mathcal{C}_7+\mathcal{C}_8|\tau|)^{s/2},\\ \mathfrak{C}'_s(\tau) &= \mathfrak{C}_s(\tau)(1+s/2)^{-1}(\mathcal{C}_7\mathcal{C}_8^{-1}+|\tau|).\end{aligned} \tag{13.15}$$

В частности, при $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, справедливы оценки

$$\| f^\varepsilon \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 \cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} \|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_s(1)\varepsilon^{s(1-\alpha)/2},$$
$$|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

$$\| f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1} \|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}'_s(1)\varepsilon^{s(1-\alpha)/2-\alpha},$$
$$|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < \frac{s}{s+2}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

§14. Усреднение задачи Коши для уравнения типа Шредингера

14.1. Задача Коши для уравнения (11.3) **с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$.** Пусть $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ — оператор (11.1). Для функции $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in \mathbb{R}$, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$i \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \tag{14.1}$$

где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ — заданная функция. Решение класса $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ дается формулой $\mathbf{u}_\varepsilon = \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon)\boldsymbol{\phi}$. Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение "усредненной" задачи Коши

$$i \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \tag{14.2}$$

где g^0 — эффективная матрица. Тогда $\mathbf{u}_0 = \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0)\boldsymbol{\phi}$.

Из теоремы 12.2 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 14.1. *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи* (14.1) *и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи* (14.2).
1°. *Если $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $0 \leq s \leq 3$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ выполнена оценка*

$$\| \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{s/3} \widehat{\mathcal{C}}_s(\tau) \| \boldsymbol{\phi} \|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

В частности, при $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$,

$$\| \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{u}_0(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{s(1-\alpha)/3} \widehat{\mathcal{C}}_s(1) \| \boldsymbol{\phi} \|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \tag{14.3}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_s(\tau)$ определена в (12.7).
2°. *Если $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{u}_0(\cdot, \tau) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{u}_0(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Утверждение 2° прямо следует из утверждения 1° и теоремы Банаха-Штейнгауза.

14.2. Неоднородная задача Коши с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Рассмотрим теперь более общую задачу

$$i\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \tag{14.4}$$

где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Для решения этой задачи справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) = \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon)\boldsymbol{\phi} - i\int_0^\tau \exp(-i(\tau-\widetilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon)\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}.$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)$ — решение усредненной задачи

$$i\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \tag{14.5}$$

Тогда

$$\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) = \exp(-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0)\boldsymbol{\phi} - i\int_0^\tau \exp(-i(\tau-\widetilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}^0)\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\,\widetilde{\tau}.$$

Теперь, в предположениях $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ при некотором $s \in [0,3]$, из оценки (12.6) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\le \varepsilon^{s/3}\widehat{\mathcal{C}}_s(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{s/3}\left|\int_0^\tau \widehat{\mathcal{C}}_s(\tau-\widetilde{\tau})\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau}\right| \\ &\le \varepsilon^{s/3}\widehat{\mathcal{C}}_s(\tau)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right), \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad 0<\varepsilon\le 1. \end{aligned} \tag{14.6}$$

Если дополнительно известно, что $\mathbf{F} \in L_p(\mathbb{R}_\pm; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ при некотором $p \in [1,\infty]$, то при $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$ из (12.8) получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\le \varepsilon^{s(1-\alpha)/3}\widehat{\mathcal{C}}_s(1)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \left|\int_0^{\pm\varepsilon^{-\alpha}} \|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau}\right|\right) \\ &\le \varepsilon^{s(1-\alpha)/3}\widehat{\mathcal{C}}_s(1)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha/p'}\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right), \quad 0<\alpha<\frac{s}{s+3/p'}, \quad 0<\varepsilon\le 1. \end{aligned} \tag{14.7}$$

Здесь $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$.

Пусть теперь известно лишь, что $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Из очевидной оценки

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 2\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 2\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);L_2(\mathbb{R}^d))}$$

и из (14.6), в силу теоремы Банаха-Штейнгауза, следует сильная сходимость $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)$ к $\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ при фиксированном $\tau\in\mathbb{R}$. Если же известно дополнительно, что $\mathbf{F}\in L_1(\mathbb{R}_\pm;L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, то при $\tau=\pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$, выполнена очевидная оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})-\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le 2\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+2\|\mathbf{F}\|_{L_1(\mathbb{R}_\pm;L_2(\mathbb{R}^d))}. \qquad (14.8)$$

Отсюда и из (14.7) (при $p=1$), в силу теоремы Банаха-Штейнгауза, следует сходимость к нулю левой части в (14.8).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 14.2. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (14.4) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение задачи* (14.5).
1°. *Если* $\boldsymbol{\phi}\in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *при некотором* $s\in[0,3]$, *то при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\le 1$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\varepsilon^{s/3}\widehat{\mathcal{C}}_s(\tau)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

В частности, при дополнительном предположении $\mathbf{F}\in L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *(где* $1\le p\le\infty$*) и при* $\tau=\pm\varepsilon^{-\alpha}$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})-\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\varepsilon^{s(1-\alpha)/3}\widehat{\mathcal{C}}_s(1)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}+\varepsilon^{-\alpha/p'}\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right)$$
$$0<\alpha<\frac{s}{s+3/p'},\quad 0<\varepsilon\le 1.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_s(\tau)$ *определена в* (12.7).
2°. *Если* $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}=0,\quad \tau\in\mathbb{R}.$$

Если, дополнительно, $\mathbf{F}\in L_1(\mathbb{R}_\pm;L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})-\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}=0,\quad 0<\alpha<1.$$

14.3. Задача Коши для уравнения (11.3) **с оператором** $\mathcal{A}_\varepsilon$**.** Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — оператор (11.2). Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$i\frac{\partial\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}=(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau),\quad f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \qquad (14.9)$$

где $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ — заданная функция. Решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (14.9) представляется в виде $\mathbf{u}_\varepsilon=\exp(-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon)(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\phi}$. Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)$ — решение "усредненной" задачи Коши

$$i\frac{\partial\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}=f_0b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})f_0\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau),\quad f_0\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0)=\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \qquad (14.10)$$

Здесь g^0 — эффективная матрица, а матрица f_0 определена в (8.2). Тогда $\mathbf{u}_0 = \exp(-i\tau\mathcal{A}^0)(f_0)^{-1}\boldsymbol{\phi}$.

Из теоремы 12.4 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 14.3. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (14.9) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение задачи* (14.11).
1°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $0 \le s \le 3$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *выполнена оценка*

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f^0\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/3}\mathcal{C}_s(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

В частности, при $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$,

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s(1-\alpha)/3}\mathcal{C}_s(1)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 < \varepsilon \le 1. \tag{14.11}$$

Постоянная $\mathcal{C}_s(\tau)$ *определена в* (12.13).
2°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Отметим, что задача (14.9) допускает переформулировку. После замены $f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon$ задача (14.9) переходит в следующую задачу Коши для функции $\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$:

$$iQ^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \tag{14.12}$$

Здесь $Q^\varepsilon(\mathbf{x}) = (f^\varepsilon(\mathbf{x})(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*)^{-1}$. Усредненная задача (14.10) после замены $f_0\mathbf{u}_0 = \mathbf{w}_0$ переходит в задачу

$$i\overline{Q}\frac{\partial \mathbf{w}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{w}_0(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{w}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \tag{14.13}$$

Здесь $\overline{Q}$ — среднее значение матрицы $Q(\mathbf{x})$ по Ω. Мы учли соотношение (8.2).

Можно принять (14.12) за исходную постановку задачи. Тогда предполагается, что $Q(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(n \times n)$-матрица-функция в $\mathbb{R}^d$ такая, что

$$Q(\mathbf{x}) > 0; \quad Q, Q^{-1} \in L_\infty. \tag{14.14}$$

Теорема 14.3 допускает следующую эквивалентную формулировку.

Теорема 14.4. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon$ *— решение задачи* (14.12) *и* $\mathbf{w}_0$ *— решение задачи* (14.13).
1°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $0 \le s \le 3$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/3}\mathcal{C}_s(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

В частности, при $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$,

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{w}_0(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{s(1-\alpha)/3}\mathcal{C}_s(1)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Постоянная $\mathcal{C}_s(\tau)$ *определена в* (12.13).
2°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{w}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{w}_0(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

14.4. Неоднородная задача Коши с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$. Рассмотрим теперь задачу более общую, чем (14.9):

$$\begin{aligned} &i\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau), \\ &f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{14.15}$$

где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$. Для решения этой задачи справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) = \exp(-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon)(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\phi} - i\int_0^\tau \exp(-i(\tau - \widetilde{\tau})\mathcal{A}_\varepsilon)(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}(\cdot, \widetilde{\tau})\, d\widetilde{\tau}.$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение усредненной задачи

$$i\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau) + f_0^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau), \quad f_0\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \tag{14.16}$$

Тогда

$$\mathbf{u}_0(\cdot, \tau) = \exp(-i\tau\mathcal{A}^0)f_0^{-1}\boldsymbol{\phi} - i\int_0^\tau \exp(-i(\tau - \widetilde{\tau})\mathcal{A}^0)f_0^{-1}\mathbf{F}(\cdot, \widetilde{\tau})\, \widetilde{\tau}.$$

Теперь, в предположениях $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$ при некотором $s \in [0, 3]$, из оценки (12.12) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \varepsilon^{s/3}\mathcal{C}_s(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{s/3}\left|\int_0^\tau \mathcal{C}_s(\tau - \widetilde{\tau})\|\mathbf{F}(\cdot, \widetilde{\tau})\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\, d\widetilde{\tau}\right| \\ &\leq \varepsilon^{s/3}\mathcal{C}_s(\tau)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau); H^s(\mathbb{R}^d))}\right), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \end{aligned}$$

В случае $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$ следует воспользоваться оценкой (12.14).

В итоге получаем следующий результат (ср. с выводом теоремы 14.2).

Теорема 14.5. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (14.15) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение задачи* (14.16).
1°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *при некотором* $s \in [0,3]$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *выполнена оценка*

$$\| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/3}\mathcal{C}_s(\tau)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

В частности, при дополнительном предположении $\mathbf{F} \in L_p(\mathbb{R}_\pm; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *(где* $1 \le p \le \infty$*) и при* $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$ *выполнена оценка*

$$\begin{aligned} &\| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\le \varepsilon^{s(1-\alpha)/3}\mathcal{C}_s(1)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha/p'}\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right), \quad 0 < \alpha < \frac{s}{s+3/p'}, \quad 0 < \varepsilon \le 1. \end{aligned}$$

Постоянная $\mathcal{C}_s(\tau)$ *определена в* (12.13).
2°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Если, дополнительно, $\mathbf{F} \in L_1(\mathbb{R}_\pm; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Задача (14.15) допускает переформулировку. Замена $f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon$ переводит задачу (14.15) в следующую задачу Коши для функции $\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$:

$$iQ^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + Q^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad (14.17)$$

где $Q^\varepsilon(\mathbf{x}) = (f^\varepsilon(\mathbf{x})(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*)^{-1}$. Усредненная задача (14.16) после замены $f_0\mathbf{u}_0 = \mathbf{w}_0$ переходит в задачу

$$i\overline{Q}\frac{\partial \mathbf{w}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{w}_0(\mathbf{x},\tau) + \overline{Q}\mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{w}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \quad (14.18)$$

Если принять (14.17) за исходную постановку задачи, то предполагается, что $Q(\mathbf{x})$ — Г-периодическая матрица, удовлетворяющая условию (14.14).

Теорема 14.5 допускает следующую эквивалентную формулировку.

Теорема 14.6. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon$ *— решение задачи* (14.17) *и* $\mathbf{w}_0$ *— решение задачи* (14.18).
1°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $0 \le s \le 3$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/3}\mathcal{C}_s(\tau)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

В частности, при дополнительном предположении $\mathbf{F} \in L_p(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *(где* $1 \le p \le \infty$*) и при* $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{w}_0(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s(1-\alpha)/3}\mathcal{C}_s(1)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha/p'}\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right), \quad 0 < \alpha < \frac{s}{s+3/p'}, \quad 0 < \varepsilon \le 1.$$

Постоянная $\mathcal{C}_s(\tau)$ *определена в* (12.13).
2°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{w}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Если, дополнительно, $\mathbf{F} \in L_1(\mathbb{R}_\pm; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{w}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

§15. Усреднение задачи Коши для гиперболического уравнения

15.1. Задача Коши для уравнения (11.4) **с оператором** $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$**.** Пусть $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ — оператор (11.1). Для функции $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in \mathbb{R}$, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}),\end{gathered} \tag{15.1}$$

где $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ — заданные функции. Решение класса $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ дается формулой

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\phi} + \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\psi}.$$

Пусть $\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)$ — решение "усредненной" задачи Коши

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{v}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}),\end{gathered} \tag{15.2}$$

где g^0 — эффективная матрица. Тогда

$$\mathbf{v}_0 = \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\boldsymbol{\phi} + (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\boldsymbol{\psi}.$$

Теперь из теоремы 13.2 вытекает следующий результат.

Теорема 15.1. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *— решение задачи* (15.1) *и* $\mathbf{v}_0$ *— решение задачи* (15.2).

1°. *Если* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $0 \le s \le 2$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/2}\left(\widehat{\mathfrak{C}}_s(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathfrak{C}}'_s(\tau)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\right). \tag{15.3}$$

В частности, при $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s(1-\alpha)/2}\left(\widehat{\mathfrak{C}}_s(1)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{\mathfrak{C}}'_s(1)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\right). \tag{15.4}$$

Здесь $0 < \alpha < \frac{s}{s+2}$, *если* $\boldsymbol{\psi} \ne 0$, *и* $0 < \alpha < 1$ *при* $\boldsymbol{\psi} = 0$. *Постоянные* $\widehat{\mathfrak{C}}_s(\tau)$, $\widehat{\mathfrak{C}}'_s(\tau)$ *определены в* (13.9).

2°. *Если* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

3°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ *и* $\boldsymbol{\psi} = 0$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Утверждение 2°, в силу теоремы Банаха-Штейнгауза, прямо следует из (15.3) и очевидной оценки

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 2\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 2|\tau|\|\boldsymbol{\psi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Утверждение 3° получается применением теоремы Банаха-Штейнгауза из (15.4) (при $\boldsymbol{\psi} = 0$ и $0 < \alpha < 1$) и очевидной оценки

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 2\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\psi} = 0.$$

15.2. Неоднородная задача Коши с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Рассмотрим теперь более общую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} &= -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{15.5}$$

где $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$ — заданные функции. Для решения этой задачи справедливо представление

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) = \cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\phi} + \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\psi} + \int_0^\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin((\tau-\widetilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}.$$

Пусть $\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)$ — решение усредненной задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{v}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}).\end{gathered} \tag{15.6}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0(\cdot,\tau) &= \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\boldsymbol{\phi} + (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\boldsymbol{\psi} \\ &+ \int_0^\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin((\tau-\widetilde{\tau})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}.\end{aligned}$$

Теперь, в предположениях $\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ при некотором $s \in [0,2]$, из оценок (13.7), (13.8) вытекает, что при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \le 1$ выполнена оценка

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/2}\left(\widehat{\mathfrak{C}}_s(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathfrak{C}}'_s(\tau)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\right) \\ &+ \varepsilon^{s/2}\left|\int_0^\tau \widehat{\mathfrak{C}}'_s(\tau-\widetilde{\tau})\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau}\right| \\ &\le \varepsilon^{s/2}\left(\widehat{\mathfrak{C}}_s(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathfrak{C}}'_s(\tau)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathfrak{C}}'_s(\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).\end{aligned}$$

Если дополнительно известно, что $\mathbf{F} \in L_p(\mathbb{R}_\pm; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ при некотором $p \in [1,\infty]$, то при $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$ из (13.10), (13.11) получаем

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\le \varepsilon^{s(1-\alpha)/2}\left(\widehat{\mathfrak{C}}_s(1)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{\mathfrak{C}}'_s(1)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{\mathfrak{C}}'_s(1)\left|\int_0^{\pm\varepsilon^{-\alpha}}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau}\right|\right) \\ &\le \varepsilon^{s(1-\alpha)/2}\left(\widehat{\mathfrak{C}}_s(1)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{\mathfrak{C}}'_s(1)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha-\alpha/p'}\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right), \\ &0 < \alpha < \frac{s}{s+2+2/p'}, \quad 0 < \varepsilon \le 1.\end{aligned}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 15.2. *Пусть $\mathbf{v}_\varepsilon$ — решение задачи (15.5) и $\mathbf{v}_0$ — решение задачи (15.6).*
1°. *Если $\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ при некотором $s \in [0,2]$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \le 1$ выполнена оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/2}\widehat{\mathfrak{C}}_s(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{s/2}\widehat{\mathfrak{C}}'_s(\tau)\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right). \tag{15.7}$$

В частности, при дополнительном предположении $\mathbf{F} \in L_p(\mathbb{R}_\pm; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *(где* $1 \le p \le \infty$*) и при* $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \varepsilon \le 1$, *выполнена оценка*

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_0(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\le \varepsilon^{s(1-\alpha)/2}\left(\widehat{\mathfrak{C}}_s(1)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{\mathfrak{C}}'_s(1)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha-\alpha/p'}\widehat{\mathfrak{C}}'_s(1)\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}.\right)\end{aligned}$$

Здесь $0 < \alpha < \frac{s}{s+2+2/p'}$. *Постоянные* $\widehat{\mathfrak{C}}_s(\tau)$, $\widehat{\mathfrak{C}}'_s(\tau)$ *определены в* (13.9).
2°. *Если* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Утверждение 2° следует из (15.7) и очевидной оценки

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 2\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 2|\tau|\|\boldsymbol{\psi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 2|\tau|\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);L_2(\mathbb{R}^d))}$$

на основании теоремы Банаха-Штейнгауза.

15.3. Задача Коши для уравнения (11.4) **с оператором** $\mathcal{A}_\varepsilon$**.** Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — оператор (11.2). Для функции $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in \mathbb{R}$, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} &= -(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau),\\ f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad f^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{v}_\varepsilon}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}),\end{aligned} \tag{15.8}$$

где $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ — заданные функции. Для решения $\mathbf{v}_\varepsilon$ задачи (15.8) справедливо представление $\mathbf{v}_\varepsilon = \cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\phi} + \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\psi}$. Пусть $\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)$ — решение "усредненной" задачи Коши

$$\frac{\partial^2\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau), \quad f_0\mathbf{v}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad f_0\frac{\partial\mathbf{v}_0}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}). \tag{15.9}$$

Здесь g^0 — эффективная матрица, а матрица f_0 определена в (8.2). Тогда $\mathbf{v}_0 = \cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\boldsymbol{\phi} + (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\boldsymbol{\psi}$.

Из теоремы 13.4 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 15.3. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *— решение задачи* (15.8) *и* $\mathbf{v}_0$ *— решение задачи* (15.9).
1°. *Если* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $0 \le s \le 2$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *выполнена оценка*

$$\|f^\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_0\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/2}\left(\mathfrak{C}_s(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{C}'_s(\tau)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\right).$$

В частности, при $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *справедлива оценка*

$$\|f^\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0\mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s(1-\alpha)/2}\left(\mathfrak{C}_s(1)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha}\mathfrak{C}'_s(1)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\right).$$

Здесь $0 < \alpha < \frac{s}{s+2}$*, если* $\boldsymbol{\psi} \neq 0$*, и* $0 < \alpha < 1$ *при* $\boldsymbol{\psi} = 0$*. Постоянные* $\mathfrak{C}_s(\tau)$*,* $\mathfrak{C}'_s(\tau)$ *определены в* (13.15).
2°. *Если* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$*, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_0 \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

3°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ *и* $\boldsymbol{\psi} = 0$*, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0 \mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Отметим, что после замены $f^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{z}_\varepsilon$ задача (15.8) допускает следующую переформулировку:

$$Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{z}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \tag{15.10}$$

где $Q^\varepsilon(\mathbf{x}) = (f^\varepsilon(\mathbf{x})(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*)^{-1}$. Усредненная задача (15.9) после замены $f_0 \mathbf{v}_0 = \mathbf{z}_0$ переходит в задачу

$$\overline{Q} \frac{\partial^2 \mathbf{z}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{z}_0(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{z}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{z}_0}{\partial \tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \tag{15.11}$$

где $\overline{Q}$ — среднее значение матрицы $Q(\mathbf{x})$ по Ω.

Если принять (15.10) за исходную постановку задачи, то предполагается, что $Q(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица, удовлетворяющая условию (14.14).

Теорема 15.3 допускает следующую эквивалентную формулировку.

Теорема 15.4. *Пусть* $\mathbf{z}_\varepsilon$ *— решение задачи* (15.10) *и* $\mathbf{z}_0$ *— решение задачи* (15.11).
1°. *Если* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$*,* $0 \le s \le 2$*, то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/2} \left(\mathfrak{C}_s(\tau) \|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{C}'_s(\tau) \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \right).$$

В частности, при $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{z}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s(1-\alpha)/2} \left(\mathfrak{C}_s(1) \|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha} \mathfrak{C}'_s(1) \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \right).$$

Здесь $0 < \alpha < \frac{s}{s+2}$*, если* $\boldsymbol{\psi} \neq 0$*, и* $0 < \alpha < 1$ *при* $\boldsymbol{\psi} = 0$*. Постоянные* $\mathfrak{C}_s(\tau)$*,* $\mathfrak{C}'_s(\tau)$ *определены в* (13.15).
2°. *Если* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$*, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{z}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

3°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ *и* $\boldsymbol{\psi} = 0$*, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{z}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

15.4. Неоднородная задача Коши с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$. Рассмотрим теперь задачу более общую, чем (15.8):

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau^2} = -(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \\
f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad f^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}),
\end{gathered} \tag{15.12}
$$

где $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ — заданные функции. Для решения этой задачи справедливо представление

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) &= \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\phi} + \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\psi} \\
&+ \int_0^\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin((\tau-\widetilde{\tau})\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}.
\end{aligned}
$$

Пусть $\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)$ — решение усредненной задачи

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau^2} = -f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau) + f_0^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \\
f_0\mathbf{v}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad f_0\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}).
\end{gathered} \tag{15.13}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_0(\cdot,\tau) &= \cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\boldsymbol{\phi} + (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\boldsymbol{\psi} \\
&+ \int_0^\tau (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin((\tau-\widetilde{\tau})(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}.
\end{aligned}
$$

По аналогии с выводом теоремы 15.2 из теоремы 13.2, применение теоремы 13.4 приводит к следующему результату.

Теорема 15.5. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *— решение задачи* (15.12) *и* $\mathbf{v}_0$ *— решение задачи* (15.13).
1°. *Если* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *при некотором* $s \in [0,2]$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *выполнена оценка*

$$
\begin{aligned}
&\| f^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_0\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/2}\mathfrak{C}_s(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad + \varepsilon^{s/2}\mathfrak{C}'_s(\tau)\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).
\end{aligned}
$$

В частности, при дополнительном предположении $\mathbf{F} \in L_p(\mathbb{R}_\pm; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *(где* $1 \le p \le \infty$*) и при* $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \varepsilon \le 1$, *выполнена оценка*

$$
\begin{aligned}
&\| f^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0\mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\le \varepsilon^{s(1-\alpha)/2}\left(\mathfrak{C}_s(1)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha}\mathfrak{C}'_s(1)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha-\alpha/p'}\mathfrak{C}'_s(1)\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right).
\end{aligned}
$$

Здесь $0 < \alpha < \frac{s}{s+2+2/p'}$. *Постоянные* $\mathfrak{C}_s(\tau)$, $\mathfrak{C}'_s(\tau)$ *определены в* (13.15).
2°. *Если* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$ *то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, \tau) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Наконец, отметим, что замена $f^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{z}_\varepsilon$ переводит задачу (15.12) в следующую задачу:

$$\begin{gathered} Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{z}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \end{gathered} \tag{15.14}$$

где $Q^\varepsilon(\mathbf{x}) = (f^\varepsilon(\mathbf{x})(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*)^{-1}$. Усредненная задача (15.13) после замены $f_0 \mathbf{v}_0 = \mathbf{z}_0$ перейдет в задачу

$$\begin{gathered} \overline{Q} \frac{\partial^2 \mathbf{z}_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{z}_0(\mathbf{x}, \tau) + \overline{Q} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{z}_0(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{z}_0}{\partial \tau}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}). \end{gathered} \tag{15.15}$$

Если принять (15.14) за исходную постановку задачи, то предполагается, что $Q(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица, удовлетворяющая условию (14.14).

Теорема 15.5 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 15.6. *Пусть* $\mathbf{z}_\varepsilon$ — *решение задачи* (15.14) *и* $\mathbf{z}_0$ — *решение задачи* (15.15).
1°. *Если* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$ *при некотором* $s \in [0, 2]$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \le 1$ *выполнена оценка*

$$\begin{aligned} \| \mathbf{z}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{z}_0(\cdot, \tau) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\le \varepsilon^{s/2} \mathfrak{C}_s(\tau) \| \boldsymbol{\phi} \|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \varepsilon^{s/2} \mathfrak{C}'_s(\tau) \left(\| \boldsymbol{\psi} \|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \| \mathbf{F} \|_{L_1((0,\tau); H^s(\mathbb{R}^d))} \right). \end{aligned}$$

В частности, при дополнительном предположении $\mathbf{F} \in L_p(\mathbb{R}_\pm; H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$ *(где* $1 \le p \le \infty$*) и при* $\tau = \pm \varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \varepsilon \le 1$, *выполнена оценка*

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{z}_\varepsilon(\cdot, \pm \varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{z}_0(\cdot, \pm \varepsilon^{-\alpha}) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \le \varepsilon^{s(1-\alpha)/2} \left(\mathfrak{C}_s(1) \| \boldsymbol{\phi} \|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha} \mathfrak{C}'_s(1) \| \boldsymbol{\psi} \|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha - \alpha/p'} \mathfrak{C}'_s(1) \| \mathbf{F} \|_{L_p(\mathbb{R}_\pm; H^s(\mathbb{R}^d))} \right). \end{aligned}$$

Здесь $0 < \alpha < \frac{s}{s+2+2/p'}$. *Постоянные* $\mathfrak{C}_s(\tau)$, $\mathfrak{C}'_s(\tau)$ *определены в* (13.15).
2°. *Если* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$ *то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \mathbf{z}_\varepsilon(\cdot, \tau) - \mathbf{z}_0(\cdot, \tau) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Глава 5. Применения общих результатов

Мы переходим к применениям общих результатов к конкретным уравнениям математической физики. Все рассматриваемые в этой главе операторы вида (11.1), (11.2) изучались ранее в [BSu2, гл. 5, 6], [BSu4, гл. 4], [BSu5, гл. 4]. Необходимые сведения о факторизации и эффективных характеристиках для этих операторов заимствованы из [BSu2, гл. 5, 6].

В §16 рассматривается модельный пример уравнения типа Шредингера с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon \nabla$ и само уравнение Шредингера с гамильтонианом $\mathcal{H}_\varepsilon = -\operatorname{div} \widetilde{g}^\varepsilon \nabla + \varepsilon^{-2} V^\varepsilon$. §17 посвящен двумерному уравнению Паули; предварительно рассматриваются модельные примеры. В §18 изучаются гиперболические уравнения — нестационарные уравнение акустики и система теории упругости.

§16. Уравнение Шредингера

16.1. Модельный пример. Уравнение типа Шредингера с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla$. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$, оператор

$$\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D} = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla. \tag{16.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — Г-периодическая вещественная $(d \times d)$-матрица, удовлетворяющая условиям

$$g(\mathbf{x}) > 0; \quad g, \ g^{-1} \in L_\infty. \tag{16.2}$$

Оператор (16.1) является частным случаем оператора (6.1). При этом $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$. Условие (4.2), очевидно, выполнено, причем $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. Представление $g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x})$ можно реализовать, полагая, например, $h = g^{1/2}$.

В соответствии с (6.8), эффективный оператор для оператора (16.1) имеет вид

$$\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D} = -\operatorname{div} g^0 \nabla. \tag{16.3}$$

Согласно общим правилам, эффективная матрица g^0 определяется следующим образом. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ — стандартные орты в $\mathbb{R}^d$. Пусть $\Phi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — (слабое) периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_\Omega \Phi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{16.4}$$

Тогда g^0 — $(d \times d)$-матрица со столбцами

$$g_j^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)\, d\mathbf{x}, \quad j = 1, \dots, d. \tag{16.5}$$

В одномерном случае выполнено $d = m = n = 1$, а потому $g^0 = \underline{g}$.

Рассмотрим теперь оператор

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}, \quad \varepsilon > 0, \tag{16.6}$$

и задачу Коши вида (14.1):

$$i\frac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} u_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \quad u_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \tag{16.7}$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ — заданная функция. Дифференциальное уравнение в (16.7) можно интерпретировать как уравнение Шредингера при наличии периодической метрики в отсутствие внешних полей.

Пусть $u_0(\mathbf{x},\tau)$ — решение "усредненной" задачи Коши

$$i\frac{\partial u_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = \mathbf{D} g^0 \mathbf{D} u_0(\mathbf{x},\tau), \quad u_0(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}). \tag{16.8}$$

Применима теорема 14.1. Если $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $0 < s \le 3$, то при $\varepsilon \to 0$ решение u_ε задачи (16.7) сходится к решению u_0 задачи (16.8) по норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$. При этом справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/3}\widehat{\mathcal{C}}_s(\tau)\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_s(\tau)$ имеет порядок $O(|\tau|^{s/3})$ (при больших значениях $|\tau|$) и зависит от норм $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ. При больших значениях времени $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$ получаем оценку

$$\|u_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - u_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s(1-\alpha)/3}\widehat{\mathcal{C}}_s(1)\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Если известно лишь, что $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то можно утверждать, что при $\varepsilon \to 0$ решение u_ε сильно сходится к u_0 в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$, а также, что разность $u_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - u_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})$ сильно сходится к нулю в $L_2(\mathbb{R}^d)$, если $0 < \alpha < 1$.

Можно также рассмотреть неоднородную задачу вида (14.4) с оператором (16.6). К этой задаче применима теорема 14.2. Мы не будем на этом останавливаться.

16.2. Периодический оператор Шредингера. Факторизация. (См. [BSu2, гл. 6, п. 1.1].) В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \ge 1$, рассмотрим периодический *оператор Шредингера* (с метрикой) вида

$$\mathcal{H} = \mathbf{D}^* \widetilde{g}(\mathbf{x})\mathbf{D} + V(\mathbf{x}), \tag{16.9}$$

где вещественная $(d\times d)$-матрица $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ и скалярный вещественный потенциал $V(\mathbf{x})$ Γ-периодичны, и выполнены условия

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) > 0; \quad \widetilde{g},\ \widetilde{g}^{-1} \in L_\infty, \tag{16.10}$$

$$V \in L_q(\Omega), \quad 2q > d \quad \text{при} \quad d \geq 2; \quad q = 1 \quad \text{при} \quad d = 1. \tag{16.11}$$

Точное определение самосопряженного в $L_2(\mathbb{R}^d)$ оператора $\mathcal{H}$ дается через квадратичную форму

$$h[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\langle \widetilde{g}(\mathbf{x})\, \mathbf{D}u, \mathbf{D}u \rangle_{\mathbb{C}^d} + V(\mathbf{x})|u|^2)\, d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d), \tag{16.12}$$

которая при условиях (16.10), (16.11) полуограничена снизу и замкнута в $L_2(\mathbb{R}^d)$. За счет добавления к $V(\mathbf{x})$ подходящей постоянной можно считать, что точка $\lambda_0 = 0$ является нижним краем спектра оператора $\mathcal{H}$. *Будем предполагать последнее условие выполненным.*

При сделанных предположениях уравнение $(\mathbf{D}^* \widetilde{g}\, \mathbf{D} + V)\omega = 0$ имеет (слабое) *положительное* Γ-*периодическое решение* $\omega \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. При этом $\omega \in \operatorname{Lip} \sigma$ (при некотором $\sigma > 0$). Кроме того, функция ω — *мультипликатор* в классах $H^1(\mathbb{R}^d)$ и $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Фиксируем выбор решения ω условием нормировки:

$$\int\limits_{\Omega} \omega(\mathbf{x})^2\, d\mathbf{x} = |\Omega|. \tag{16.13}$$

Замена $u = \omega v$ преобразует форму (16.12) к виду

$$h[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega^2 \langle \widetilde{g}\, \mathbf{D}v, \mathbf{D}v \rangle_{\mathbb{C}^d}\, d\mathbf{x}, \quad u = \omega v, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Последнее означает, что оператор (16.9) преобразуется в произведение

$$\mathcal{H} = \omega^{-1} \mathbf{D}^* \omega^2 \widetilde{g}\, \mathbf{D} \omega^{-1}. \tag{16.14}$$

Таким образом, оператор $\mathcal{H}$ приведен к виду (4.6), причем $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, $g = \omega^2 \widetilde{g}$, $f = \omega^{-1}$.

Замечание 16.1. Выражение (16.14) можно принять за *определение* оператора $\mathcal{H}$, считая, что ω — произвольная Γ-периодическая функция, удовлетворяющая условиям

$$\omega(\mathbf{x}) > 0, \quad \omega, \omega^{-1} \in L_\infty,$$

а также условию (16.13). Возвращение к записи вида (16.9) происходит с учетом формулы $V = -\omega^{-1}(\mathbf{D}^* \widetilde{g}\, \mathbf{D}\omega)$. Получающийся при этом потенциал V может оказаться высоко сингулярным.

16.3. Уравнение Шредингера. Оператор (16.14) связан с оператором (16.1) (при $g = \omega^2 \widetilde{g}$) соотношением $\mathcal{H} = \omega^{-1} \widehat{\mathcal{A}} \omega^{-1}$. Пусть g^0 — эффективная матрица для оператора (16.1). Функция $Q(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})^*)^{-1}$ сейчас принимает вид $Q(\mathbf{x}) = \omega^2(\mathbf{x})$. Тогда, в силу (16.13), $\overline{Q} = \overline{\omega^2} = 1$ и $f_0 = (\overline{Q})^{-1/2} = 1$. Оператор (8.5) сейчас принимает вид

$$\mathcal{H}^0 = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D}. \tag{16.15}$$

Тем самым, $\mathcal{H}^0$ совпадает с эффективным оператором для оператора $\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g \mathbf{D} = \mathbf{D}^* \widetilde{g} \omega^2 \mathbf{D}$ (см. (16.3)).

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathcal{H}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1} \mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D} (\omega^\varepsilon)^{-1}, \quad g^\varepsilon(\mathbf{x}) = (\omega^\varepsilon(\mathbf{x}))^2 \widetilde{g}^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{16.16}$$

Если выполнено условие (16.11), то выражение (16.16) можно также переписать в исходных терминах:

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \mathbf{D}^* \widetilde{g}^\varepsilon \mathbf{D} + \varepsilon^{-2} V^\varepsilon. \tag{16.17}$$

Существенно, что в (16.17) при быстро осциллирующем потенциале V^ε стоит большой множитель ε^{-2}.

Рассмотрим задачу Коши вида (14.9) для *уравнения Шредингера*

$$i \frac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathcal{H}_\varepsilon u_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau), \quad (\omega^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}),$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ — заданная функция.

Пусть $u_0(\mathbf{x}, \tau)$ — решение "усредненной" задачи Коши (см. (14.10))

$$i \frac{\partial u_0(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \mathcal{H}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \tau), \quad u_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \tag{16.18}$$

Отметим, что в силу (16.15) задача (16.18) совпадает с (16.8). Применима теорема 14.3. При условии $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $0 < s \leq 3$, произведение $(\omega^\varepsilon)^{-1} u_\varepsilon$ сходится при $\varepsilon \to 0$ к u_0 по норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$. При этом справедлива оценка

$$\|(\omega^\varepsilon)^{-1} u_\varepsilon(\cdot, \tau) - u_0(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{s/3} \mathcal{C}_s(\tau) \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Постоянная $\mathcal{C}_s(\tau)$ имеет порядок $O(|\tau|^{s/3})$ (при больших значениях $|\tau|$) и зависит от норм $\|\widetilde{g}\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{g}^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\omega\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ. При условии (16.11) постоянная контролируется через $\|\widetilde{g}\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{g}^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|V\|_{L_q(\Omega)}$ и параметры решетки.

При больших значениях времени $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$ получаем оценку

$$\|(\omega^\varepsilon)^{-1} u_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - u_0(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{s(1-\alpha)/3} \mathcal{C}_s(1) \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Если $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то при $\varepsilon \to 0$ произведение $(\omega^\varepsilon)^{-1} u_\varepsilon$ сильно сходится к u_0 в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$, а также разность $(\omega^\varepsilon)^{-1} u_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - u_0(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha})$ сильно сходится к нулю в $L_2(\mathbb{R}^d)$, если $0 < \alpha < 1$.

Можно также рассмотреть неоднородную задачу вида (14.15) с оператором (16.16). К этой задаче применима теорема 14.5.

Замечание 16.2. Магнитный оператор Шредингера

$$\mathcal{M} = (\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x}))^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) (\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x})) + V(\mathbf{x})$$

с периодическими метрикой $\widetilde{g}(\mathbf{x})$, магнитным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ и электрическим потенциалом $V(\mathbf{x})$, при условии, что магнитный потенциал достаточно мал, а нижний край спектра оператора $\mathcal{M}$ есть точка $\lambda_0 = 0$, также допускает факторизацию вида (4.6). Эта факторизация найдена в работе [Sh]. (См. также [BSu4, п. 11.3].) В этом случае возможно применение теорем 14.3 и 14.5 к соответствующим задачам Коши с оператором

$$\mathcal{M}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \varepsilon^{-1}\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \widetilde{g}^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \varepsilon^{-1}\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-2}V^\varepsilon(\mathbf{x}).$$

§17. Двумерное уравнение Паули

17.1. Модельные примеры, которые мы теперь рассмотрим, будут полезны при обсуждении двумерного оператора Паули в п. 17.3–17.5. Они любопытны и сами по себе. Соответствующие операторы рассматривались в [BSu2, гл. 5, п. 1.3].

Пусть $d = 2$, $n = m = 1$, и пусть $\omega_\pm(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция, причем

$$\omega_\pm(\mathbf{x}) > 0; \quad \omega_\pm, \omega_\pm^{-1} \in L_\infty. \tag{17.1}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{B}_\pm = \partial_\pm \omega_\pm^2(\mathbf{x}) \partial_\mp, \tag{17.2±}$$

где $\partial_\pm := D_1 \pm iD_2$. Операторы $\mathcal{B}_+$ и $\mathcal{B}_-$ однотипны, и их удобно рассматривать параллельно. Оператор $\mathcal{B}_\pm$ — это оператор вида (6.1) при $g = \omega_\pm^2$, $b(\mathbf{D}) = D_1 \mp iD_2$. Поскольку $m = n = 1$, то эффективная константа $g_\pm^0$ определяется формулой

$$g_\pm^0 = \underline{(\omega_\pm^2)} = \left(|\Omega|^{-1} \int_\Omega \omega_\pm(\mathbf{x})^{-2}\, d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

Согласно (6.8), эффективный оператор $\mathcal{B}_\pm^0$ для $\mathcal{B}_\pm$ есть

$$\mathcal{B}_\pm^0 = \partial_\pm g_\pm^0 \partial_\mp = -g_\pm^0 \Delta.$$

Рассмотрим теперь матричный вариант предыдущего примера, в котором $d = n = m = 2$. Пусть $\omega_\pm(\mathbf{x})$ — две (скалярные) Γ-периодические функции, удовлетворяющие условию (17.1). В $L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ рассмотрим оператор

$$\mathcal{B}_\times = \operatorname{diag}(\partial_- \omega_-^2 \partial_+,\ \partial_+ \omega_+^2 \partial_-) =: \operatorname{diag}\{\mathcal{B}_-,\ \mathcal{B}_+\}. \tag{17.3}$$

Оператор (17.3) допускает факторизацию вида (6.1):

$$\mathcal{B}_\times = b_\times(\mathbf{D}) g_\times(\mathbf{x}) b_\times(\mathbf{D}),$$

где

$$b_\times(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_- \\ \partial_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad g_\times = \operatorname{diag}\{\omega_+^2, \omega_-^2\}. \tag{17.4}$$

Поскольку сейчас $m = n = 2$, то эффективная матрица для оператора (17.3) имеет вид
$$g_\times^0 = \underline{g_\times} = \operatorname{diag}\{g_+^0, g_-^0\}, \quad g_\pm^0 = \underline{(\omega_\pm^2)}. \tag{17.5}$$
Эффективный оператор $\mathcal{B}_\times^0$ есть
$$\mathcal{B}_\times^0 = b_\times(\mathbf{D}) g_\times^0 b_\times(\mathbf{D}) = \operatorname{diag}\{\mathcal{B}_-^0, \mathcal{B}_+^0\}, \quad \mathcal{B}_\pm^0 = -g_\pm^0 \Delta. \tag{17.6}$$

17.2. Задачи усреднения для модельных операторов. Введем теперь операторы
$$\mathcal{B}_{\pm,\varepsilon} = \partial_\pm (\omega_\pm^\varepsilon)^2 \partial_\mp, \tag{17.7$\pm$}$$
$$\mathcal{B}_{\times,\varepsilon} = b_\times(\mathbf{D}) g_\times^\varepsilon(\mathbf{x}) b_\times(\mathbf{D}) = \operatorname{diag}\{\mathcal{B}_{-,\varepsilon},\, \mathcal{B}_{+,\varepsilon}\},$$
коэффициенты которых быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим пару задач Коши для скалярных функций $v_{\pm,\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)$:
$$i \frac{\partial v_{+,\varepsilon}}{\partial \tau} = \partial_+ (\omega_+^\varepsilon(\mathbf{x}))^2 \partial_- v_{+,\varepsilon}, \quad v_{+,\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \phi_+(\mathbf{x}), \tag{17.8+}$$
$$i \frac{\partial v_{-,\varepsilon}}{\partial \tau} = \partial_- (\omega_-^\varepsilon(\mathbf{x}))^2 \partial_+ v_{-,\varepsilon}, \quad v_{-,\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \phi_-(\mathbf{x}), \tag{17.8$-$}$$
где $\phi_\pm \in L_2(\mathbb{R}^2)$ — заданные функции. К задачам (17.8$\pm$) применима теорема 14.1. Соответствующие усредненные задачи имеют вид
$$i \frac{\partial v_{\pm,0}}{\partial \tau} = -g_\pm^0 \Delta v_{\pm,0}, \quad v_{\pm,0}(\mathbf{x}, 0) = \phi_\pm(\mathbf{x}), \tag{17.9$\pm$}$$
где константы $g_\pm^0$ определены в (17.5).

В силу теоремы 14.1, если $\phi_\pm \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $0 < s \le 3$, то при $\varepsilon \to 0$ функция $v_{\pm,\varepsilon}$ сходится к $v_{\pm,0}$ в $L_2(\mathbb{R}^2)$ при фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$. При этом справедлива оценка
$$\|v_{\pm,\varepsilon}(\cdot,\tau) - v_{\pm,0}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \le \varepsilon^{s/3} \widehat{\mathcal{C}}_{\pm,s}(\tau) \|\phi_\pm\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1. \tag{17.10$\pm$}$$
Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_{\pm,s}(\tau)$ имеет порядок $O(|\tau|^{s/3})$ (при больших значениях $|\tau|$) и зависит от норм $\|\omega_\pm\|_{L_\infty}$, $\|\omega_\pm^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки. Справедлива также оценка разности $v_{\pm,\varepsilon} - v_{\pm,0}$ вида (14.3) при $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, и утверждения о сильной сходимости из п. 2° теоремы 14.1.

Можно рассмотреть также неоднородные задачи Коши вида (14.4) с операторами (17.7$\pm$). К таким задачам применима теорема 14.2.

Рассмотрим теперь задачу Коши для вектор-функции $\mathbf{v}_{\times,\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)$:
$$i \frac{\partial \mathbf{v}_{\times,\varepsilon}}{\partial \tau} = \mathcal{B}_{\times,\varepsilon} \mathbf{v}_{\times,\varepsilon}, \quad \mathbf{v}_{\times,\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \tag{17.11}$$
где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ — заданная функция. Пусть $\boldsymbol{\phi} = \operatorname{col}\{\phi_-, \phi_+\}$. Ясно, что $\mathbf{v}_{\times,\varepsilon} = \operatorname{col}\{v_{-,\varepsilon}, v_{+,\varepsilon}\}$, где $v_{\pm,\varepsilon}$ — решения задач (17.8$\pm$).

К задаче (17.11) применима теорема 14.1. Соответствующая усредненная задача имеет вид
$$i\frac{\partial \mathbf{v}_{\times,0}}{\partial \tau} = \mathcal{B}^0_\times \mathbf{v}_{\times,0}, \quad \mathbf{v}_{\times,0}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}),$$
где $\mathcal{B}^0_\times$ — эффективный оператор (17.6). Ясно, что $\mathbf{v}_{\times,0} = \operatorname{col}\{v_{-,0}, v_{+,0}\}$, где $v_{\pm,0}$ — решения задач (17.9±).

В силу теоремы 14.1, если $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$, $0 < s \le 3$, то выполнена оценка
$$\|\mathbf{v}_{\times,\varepsilon}(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_{\times,0}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \le \varepsilon^{s/3}\widehat{\mathcal{C}}_{\times,s}(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad 0<\varepsilon\le 1. \tag{17.12}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_{\times,s}(\tau)$ есть $O(|\tau|^{s/3})$ (при больших значениях $|\tau|$) и зависит от норм $\|\omega_+\|_{L_\infty}$, $\|\omega_+^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\omega_-\|_{L_\infty}$, $\|\omega_-^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки. Разумеется, оценку (17.12) можно было бы получить из пары оценок (17.10±) и из распадения задачи (17.11) на две скалярных задачи (17.8±). Для разности $\mathbf{v}_{\times,\varepsilon} - \mathbf{v}_{\times,0}$ справедлива также оценка вида (14.3) при $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$, а также утверждение 2° теоремы 14.1.

17.3. Определение и факторизация двумерного оператора Паули. (См. [BSu2, гл. 6, п. 2.1].) Пусть *магнитный потенциал* $\mathbf{A} = \{A_1, A_2\}$ — Γ-периодическая вещественная вектор-функция в $\mathbb{R}^2$, причем
$$\mathbf{A} \in L_\rho(\Omega;\mathbb{C}^2), \quad \rho > 2. \tag{17.13}$$

Напомним стандартные обозначения для матриц Паули
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ оператор
$$\mathcal{D} := (D_1 - A_1)\sigma_1 + (D_2 - A_2)\sigma_2, \quad \operatorname{Dom}\mathcal{D} = H^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2). \tag{17.14}$$

По определению оператор Паули $\mathcal{P}$ есть квадрат оператора $\mathcal{D}$:
$$\mathcal{P} := \mathcal{D}^2 = \begin{pmatrix} P_- & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix}. \tag{17.15}$$

Точное определение оператора $\mathcal{P}$ дается через замкнутую в $L_2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ квадратичную форму
$$\|\mathcal{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2).$$

Если потенциал $\mathbf{A}$ достаточно гладкий, то блоки $P_\pm$ оператора (17.15) записываются в виде
$$P_\pm = (\mathbf{D} - \mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 \pm B(\mathbf{x}), \quad B := \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1. \tag{17.16}$$

Выражение $B(\mathbf{x})$ соответствует напряженности магнитного поля.

Воспользуемся известной факторизацией для операторов (17.14), (17.15). За счет калибровочного преобразования потенциал $\mathbf{A}$ можно подчинить условиям

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0, \quad \int\limits_{\Omega} \mathbf{A}\,d\mathbf{x} = 0, \tag{17.17}$$

не нарушая (17.13). При условиях (17.13), (17.17) найдется (единственная) вещественная Γ-периодическая функция φ, такая что

$$\nabla\varphi = \{A_2, -A_1\}, \quad \int\limits_{\Omega} \varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{17.18}$$

Из (17.13), (17.18) вытекает, что

$$\varphi \in \widetilde{W}^1_\rho(\Omega) \subset \operatorname{Lip}\sigma, \quad \sigma = 1 - 2\rho^{-1}. \tag{17.19}$$

Здесь $\widetilde{W}^1_\rho(\Omega)$ — подпространство в классе Соболева $W^1_\rho(\Omega)$, состоящее из функций, Γ-периодическое продолжение которых принадлежит $W^1_{\rho,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Положим

$$\omega_\pm(\mathbf{x}) := e^{\pm\varphi(\mathbf{x})}, \tag{17.20}$$

и будем использовать обозначения (17.4) (с $\omega_\pm$ из (17.20)), а также обозначение

$$f_\times := g_\times^{1/2} = \operatorname{diag}\{\omega_+, \omega_-\}. \tag{17.21}$$

В силу (17.19), $\omega_\pm \in \widetilde{W}^1_\rho(\Omega)$ и выполнено соотношение

$$\omega_-(\mathbf{x})\omega_+(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \tag{17.22}$$

Операторы (17.14), (17.15) допускают запись

$$\mathcal{D} = f_\times(\mathbf{x}) b_\times(\mathbf{D}) f_\times(\mathbf{x}), \tag{17.23}$$

$$\mathcal{P} = f_\times(\mathbf{x}) b_\times(\mathbf{D}) g_\times(\mathbf{x}) b_\times(\mathbf{D}) f_\times(\mathbf{x}). \tag{17.24}$$

Для блоков $P_\pm$ оператора (17.24) справедливы представления

$$P_+ = \omega_-\partial_+\omega_+^2\partial_-\omega_-, \quad P_- = \omega_+\partial_-\omega_-^2\partial_+\omega_+. \tag{17.25}$$

Таким образом, $P_+ = Y^*Y$, $P_- = YY^*$, где $Y := \omega_+\partial_-\omega_-$. Удобно принять выражения (17.23)–(17.25) за *определение* операторов $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}$, $P_\pm$, предполагая, что $\omega_\pm$ — произвольные Γ-периодические функции, удовлетворяющие условиям (17.1), а также условию (17.22). Более точно, оператор $\mathcal{D}$ задается тогда выражением (17.23) на области определения

$$\operatorname{Dom}\mathcal{D} = \{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) : \ f_\times\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)\}.$$

Оператор $\mathcal{P}$ задается формой $\|\mathcal{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{D}$. Блоки $P_\pm$ определяются через квадратичные формы

$$\|\omega_\pm \partial_\mp \omega_\mp u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}, \quad \omega_\mp u \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

При этом напряженность магнитного поля в (17.16) теряет непосредственный смысл.

Ясно, что $\operatorname{Ker} Y = \operatorname{Ker} Y^* = \{0\}$. Поэтому операторы $P_+ = Y^*Y$ и $P_- = YY^*$ унитарно эквивалентны. Изучение оператора $\mathcal{P}$, очевидно, сводится к изучению блоков $P_\pm$.

17.4. Эффективные характеристики для двумерного оператора Паули. Операторы $P_\pm$ и $\mathcal{P}$ имеют вид (4.6). Начнем с операторов $P_\pm$. Сейчас $d = 2$, $m = n = 1$. Формулы (17.25) дают запись операторов $P_\pm$ в виде $\mathcal{A}(g, f)$ (см. (4.6)) при $b(\mathbf{D}) = D_1 \mp iD_2$, $g = \omega_\pm^2$, $f = \omega_\mp$. При этом оператор $\widehat{\mathcal{A}}(g)$, соответствующий оператору $P_\pm$, есть $\mathcal{B}_\pm$ (см. (17.2$\pm$)). В соответствии с (17.5), (17.22), эффективные константы $g^0_\pm$ определяются следующим образом:

$$g^0_\pm = \left(|\Omega|^{-1} \int_\Omega \omega_\mp^2 \, d\mathbf{x} \right)^{-1} =: \omega^2_{\pm,0}. \tag{17.26$\pm$}$$

Роль $Q(\mathbf{x})$ (см. (8.1)) для оператора $P_\pm$ играет функция $Q_\pm = \omega_\mp^2$. Тогда, с учетом (17.26$\pm$), $\overline{Q_\pm} = \overline{(\omega_\mp^2)} = (g^0_\mp)^{-1} = (\omega_{\mp,0})^{-2}$. Роль f_0 (см. (8.2)) для $P_\pm$ играет константа $(\overline{Q_\pm})^{-1/2} = (g^0_\mp)^{1/2} = \omega_{\mp,0}$. Соответственно, роль оператора $\mathcal{A}^0$ (см. (8.5)) для P_+ играет оператор $P^0_+ = \omega_{-,0}\partial_+ g^0_+ \partial_- \omega_{-,0} = -\gamma\Delta$, а для P_- роль $\mathcal{A}^0$ играет оператор $P^0_- = \omega_{+,0}\partial_- g^0_- \partial_+ \omega_{+,0} = -\gamma\Delta$. Здесь

$$\gamma := g^0_+ g^0_- = |\Omega|^2 \|\omega_+\|^{-2}_{L_2(\Omega)} \|\omega_-\|^{-2}_{L_2(\Omega)}. \tag{17.27}$$

Таким образом,

$$P^0_+ = P^0_- = -\gamma\Delta. \tag{17.28}$$

Кратко остановимся на операторе $\mathcal{P}$. Здесь $m = n = d = 2$. Представление (17.24) дает запись оператора $\mathcal{P}$ в виде $\mathcal{A}(g, f)$ (см. (4.6)), где $b(\mathbf{D}) = b_\times(\mathbf{D})$, $g = g_\times$, $f = f_\times$ определены в (17.4), (17.21). Роль соответствующего оператора $\widehat{\mathcal{A}}(g)$ играет оператор $\mathcal{B}_\times$, определенный в (17.3). Эффективная матрица $g^0_\times$ задана в (17.5), а эффективный оператор $\mathcal{B}^0_\times$ определен в (17.6). Роль матрицы $Q(\mathbf{x})$ (см. (8.1)) для оператора $\mathcal{P}$ играет матрица

$$Q_\times = f_\times^{-2} = g_\times^{-1} = \operatorname{diag}\{\omega_-^2, \omega_+^2\}.$$

Тогда, в силу (17.26$\pm$),

$$\overline{Q_\times} = \operatorname{diag}\{(g^0_+)^{-1}, (g^0_-)^{-1}\}.$$

Роль f_0 (см. (8.2)) для $\mathcal{P}$ играет матрица

$$f_{\times,0} = (\overline{Q_\times})^{-1/2} = \mathrm{diag}\,\{\omega_{+,0}, \omega_{-,0}\}. \tag{17.29}$$

Соответственно, роль оператора $\mathcal{A}^0$ (см. (8.5)) для $\mathcal{P}$ играет оператор

$$\mathcal{P}^0 = f_{\times,0}\mathcal{B}^0_\times f_{\times,0} = -\gamma\Delta, \tag{17.30}$$

где число γ определено в (17.27).

17.5. Усреднение задачи Коши для двумерного уравнения Паули. Введем теперь операторы

$$P_{+,\varepsilon} = \omega^\varepsilon_-\partial_+(\omega^\varepsilon_+)^2\partial_-\omega^\varepsilon_-, \quad P_{-,\varepsilon} = \omega^\varepsilon_+\partial_-(\omega^\varepsilon_-)^2\partial_+\omega^\varepsilon_+, \tag{17.31}$$

$$\mathcal{P}_\varepsilon = f^\varepsilon_\times(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D})g^\varepsilon_\times(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D})f^\varepsilon_\times(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P_{-,\varepsilon} & 0 \\ 0 & P_{+,\varepsilon} \end{pmatrix}, \tag{17.32}$$

коэффициенты которых быстро осциллируют при малом ε.

При условии, что потенциал $\mathbf{A}$ достаточно гладкий, операторы (17.31) можно переписать в виде

$$P_{\pm,\varepsilon} = (\mathbf{D} - \varepsilon^{-1}\mathbf{A}^\varepsilon)^2 \pm \varepsilon^{-2}B^\varepsilon.$$

Рассмотрим пару задач Коши для скалярных функций $u_{\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)$:

$$i\frac{\partial u_{\pm,\varepsilon}}{\partial\tau} = P_{\pm,\varepsilon}u_{\pm,\varepsilon}, \quad \omega^\varepsilon_\mp(\mathbf{x})u_{\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},0) = \phi_\pm(\mathbf{x}), \tag{17.33$\pm$}$$

где $\phi_\pm \in L_2(\mathbb{R}^2)$ — заданные функции. К задачам (17.43$\pm$) применима теорема 14.3. Соответствующие усредненные задачи имеют вид (см. (17.28))

$$i\frac{\partial u_{\pm,0}}{\partial\tau} = -\gamma\Delta u_{\pm,0}, \quad \omega_{\mp,0}u_{\pm,0}(\mathbf{x},0) = \phi_\pm(\mathbf{x}), \tag{17.34$\pm$}$$

где число γ определено в (17.27), а числа $\omega_{\pm,0}$ определены в (17.26$\pm$).

В силу теоремы 14.3, если $\phi_\pm \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $0 < s \le 3$, то при $\varepsilon \to 0$ произведение $\omega^\varepsilon_\mp u_{\pm,\varepsilon}$ сходится к $\omega_{\mp,0}u_{\pm,0}$ в $L_2(\mathbb{R}^2)$ при фиксированном $\tau\in\mathbb{R}$. При этом справедлива оценка

$$\|\omega^\varepsilon_\mp u_{\pm,\varepsilon}(\cdot,\tau) - \omega_{\mp,0}u_{\pm,0}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \le \varepsilon^{s/3}\mathcal{C}_{\pm,s}(\tau)\|\phi_\pm\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad 0<\varepsilon\le 1. \tag{17.35$\pm$}$$

Постоянные $\mathcal{C}_{\pm,s}(\tau)$ имеют порядок $O(|\tau|^{s/3})$ (при больших значениях $|\tau|$) и зависят от норм $\|\omega_+\|_{L_\infty}$, $\|\omega_-\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки. При условии (17.13) эти постоянные контролируются через норму $\|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}$ и параметры решетки. Справедливы также оценка разности $\omega^\varepsilon_\mp u_{\pm,\varepsilon} - \omega_{\mp,0}u_{\mp,0}$ вида (14.11) при $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$, и утверждения о сильной сходимости из п. 2° теоремы 14.3.

Можно рассмотреть также неоднородные задачи Коши вида (14.15) с операторами (17.31). К таким задачам применима теорема 14.5.

Рассмотрим, наконец, *задачу Коши для уравнения Паули*

$$i\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial \tau} = \mathcal{P}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon, \quad f_\times^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \tag{17.36}$$

где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ — заданная функция, оператор $\mathcal{P}_\varepsilon$ определен в (17.32), и $f_\times^\varepsilon = \operatorname{diag}\{\omega_+^\varepsilon, \omega_-^\varepsilon\}$. Пусть $\boldsymbol{\phi} = \operatorname{col}\{\phi_-, \phi_+\}$. Ясно, что $\mathbf{u}_\varepsilon = \operatorname{col}\{u_{-,\varepsilon}, u_{+,\varepsilon}\}$, где $u_{\pm,\varepsilon}$ — решения задач (17.33±).

К задаче (17.36) применима теорема 14.3. Соответствующая усредненная задача имеет вид (см. (17.30))

$$i\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \tau} = -\gamma\Delta\mathbf{u}_0, \quad f_{\times,0}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}),$$

где число γ определено в (17.27), а матрица $f_{\times,0}$ определена в (17.29). Ясно, что $\mathbf{u}_0 = \operatorname{col}\{u_{-,0}, u_{+,0}\}$, где $u_{\pm,0}$ — решения задач (17.34±).

В силу теоремы 14.3, если $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$, $0 < s \le 3$, то выполнена оценка

$$\|f_\times^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_{\times,0}\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \le \varepsilon^{s/3}\mathcal{C}_{\times,s}(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad 0<\varepsilon\le 1. \tag{17.37}$$

Постоянная $\mathcal{C}_{\times,s}(\tau)$ есть $O(|\tau|^{s/3})$ (при больших значениях $|\tau|$) и зависит от норм $\|\omega_+\|_{L_\infty}$, $\|\omega_-\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки. Разумеется, оценку (17.37) можно было бы получить из пары оценок (17.35±) и из распадения задачи (17.36) на две скалярных задачи (17.33±). Для разности $f_\times^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon - f_{\times,0}\mathbf{u}_0$ справедлива также оценка вида (14.11) при $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$, а также утверждение 2° теоремы 14.3.

К задаче Коши вида (14.15) для уравнения Паули при наличии правой части применима теорема 14.5.

§18. Гиперболические задачи. Уравнение акустики и система теории упругости

18.1. Уравнение акустики. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^d)$ оператор $\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D}$ (см. (16.1)) с периодической матрицей $g(\mathbf{x})$, удовлетворяющей условию (16.2). Оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ описывает периодическую акустическую среду. Эффективная матрица g^0 определяется в соответствии с (16.4), (16.5), а эффективный оператор есть $\widehat{\mathcal{A}}^0 = \mathbf{D}^* g^0\mathbf{D}$. Пусть $Q(\mathbf{x})$ — Г-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, причем

$$Q(\mathbf{x}) > 0; \quad Q, Q^{-1} \in L_\infty.$$

Функция $Q(\mathbf{x})$ имеет смысл плотности среды. Введем оператор $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, коэффициенты которого быстро осциллируют при малом ε.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения акустики в среде с быстро осциллирующими характеристиками:

$$\begin{gathered} Q^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial^2 z_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon z_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad \tau\in\mathbb{R}, \\ z_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \psi(\mathbf{x}), \end{gathered} \tag{18.1}$$

где $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ — заданные функции.

Задача (18.1) имеет вид (15.10), а потому к ней применима теорема 15.4. Усредненная задача (см. (15.11)) принимает вид

$$\overline{Q}\frac{\partial^2 z_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -\widehat{\mathcal{A}}^0 z_0(\mathbf{x},\tau),$$
$$z_0(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial z_0}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \psi(\mathbf{x}).$$

В силу теоремы 15.4, если $\phi, \psi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $0 < s \le 2$, то при $\varepsilon \to 0$ решение z_ε сходится к z_0 в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$. При этом справедлива оценка

$$\|z_\varepsilon(\cdot,\tau) - z_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/2}\left(\mathfrak{C}_s(\tau)\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{C}'_s(\tau)\|\psi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\right), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1.$$

При этом $\mathfrak{C}_s(\tau)$ есть $O(|\tau|^{s/2})$, а $\mathfrak{C}'_s(\tau)$ есть $O(|\tau|^{1+s/2})$ при больших значениях $|\tau|$; $\mathfrak{C}_s(\tau)$ и $\mathfrak{C}'_s(\tau)$ зависят от норм $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|Q\|_{L_\infty}$, $\|Q^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ. При $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\|z_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - z_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\le \varepsilon^{s(1-\alpha)/2}\left(\mathfrak{C}_s(1)\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha}\mathfrak{C}'_s(1)\|\psi\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}\right), \quad 0 < \varepsilon \le 1.\end{aligned}$$

Здесь $0 < \alpha < \frac{s}{s+2}$ при $\psi \ne 0$ и $0 < \alpha < 1$ при $\psi = 0$.

Если известно лишь, что $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то можно утверждать, что при $\varepsilon \to 0$ решение z_ε сильно сходится к z_0 в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$. Если же $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\psi = 0$, то разность $z_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - z_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})$ сильно сходится в $L_2(\mathbb{R}^d)$ к нулю при $0 < \alpha < 1$.

Для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$ можно рассмотреть и задачу вида (15.14) с нетривиальной правой частью в уравнении. К такой задаче применима теорема 15.6.

18.2. Оператор теории упругости. Пусть $d \ge 2$. Мы воспользуемся способом записи оператора теории упругости, принятом в [BSu2, гл. 5, §2]. Пусть ζ — ортогональный тензор второго ранга в $\mathbb{R}^d$; в стандартном ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^d$ он записывается в виде матрицы $\zeta = \{\zeta_{jl}\}_{j,l=1}^d$. Будем рассматривать *симметричные* тензоры ζ, отождествляя их с векторами $\zeta_* \in \mathbb{C}^m$, $2m = d(d+1)$, по следующему правилу. В ζ_* входят все элементы ζ_{jl}, $j \le l$, причем пары (j,l) упорядочены каким-либо фиксированным способом.

Для *вектора смещений* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$ вводится *тензор деформаций*

$$e(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right\}.$$

Пусть $e_*(\mathbf{u})$ — вектор, отвечающий тензору $e(\mathbf{u})$ в соответствии с описанным правилом. Равенство

$$b(\mathbf{D})\mathbf{u} = -ie_*(\mathbf{u})$$

однозначно определяет $(m \times d)$-матричный однородный ДО $b(\mathbf{D})$ с вещественным символом. Например, при подходящем упорядочении

$$b(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi^1 & 0 \\ \frac{1}{2}\xi^2 & \frac{1}{2}\xi^1 \\ 0 & \xi^2 \end{pmatrix}, \quad d = 2; \quad b(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi^1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\xi^2 & \frac{1}{2}\xi^1 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\xi^3 & \frac{1}{2}\xi^2 \\ 0 & 0 & \xi^3 \\ \frac{1}{2}\xi^3 & 0 & \frac{1}{2}\xi^1 \end{pmatrix}, \quad d = 3.$$

Пусть $\sigma(\mathbf{u})$ — *тензор напряжений*, а $\sigma_*(\mathbf{u})$ — соответствующий вектор. При принятом способе записи *закон Гука* о пропорциональности напряжений деформациям выражается соотношением

$$\sigma_*(\mathbf{u}) := g(\mathbf{x}) e_*(\mathbf{u}),$$

где $g(\mathbf{x})$ — $(m \times m)$-матрица ("экономно" описывающая тензор Гука). Матрица $g(\mathbf{x})$ характеризует параметры упругой (вообще говоря, *анизотропной*) среды. Будем предполагать, что матрица-функция $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая, причем $g(\mathbf{x}) > 0$ и $g, g^{-1} \in L_\infty$.

Энергия упругих деформаций задается квадратичной формой

$$w[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \sigma_*(\mathbf{u}), e_*(\mathbf{u}) \rangle_{\mathbb{C}^m} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle_{\mathbb{C}^m} \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d). \tag{18.2}$$

Отвечающий этой форме оператор $\mathcal{W}$ является *оператором теории упругости*. Таким образом,

$$2\mathcal{W} = b(\mathbf{D})^* g b(\mathbf{D}) = \widehat{\mathcal{A}}(g).$$

Сейчас $n = d$, $m = d(d+1)/2$.

В случае изотропной среды матрица $g(\mathbf{x})$ зависит всего от двух функциональных *параметров Ляме* $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$. Параметр μ — *модуль сдвига*. Вместо $\lambda(\mathbf{x})$ часто вводят другой параметр $K(\mathbf{x})$ — *модуль объемного сжатия*; нам понадобится еще один модуль — $\beta(\mathbf{x})$. Выпишем соотношения:

$$K(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) + \frac{2\mu(\mathbf{x})}{d}, \quad \beta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + \frac{\lambda(\mathbf{x})}{2}.$$

Модуль $\lambda(\mathbf{x})$ может быть и отрицательным. Условия положительной определенности матрицы $g(\mathbf{x})$ в изотропном случае имеют вид: $\mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0 > 0$, $K(\mathbf{x}) \geq K_0 > 0$. Для примера выпишем матрицу g в изотропном случае при $d = 2, 3$:

$$g_{\mu,K}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} K+\mu & 0 & K-\mu \\ 0 & 4\mu & 0 \\ K-\mu & 0 & K+\mu \end{pmatrix}, \quad d = 2,$$

$$g_{\mu,K}(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3K+4\mu & 0 & 3K-2\mu & 0 & 3K-2\mu & 0 \\ 0 & 12\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3K-2\mu & 0 & 3K+4\mu & 0 & 3K-2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12\mu & 0 & 0 \\ 3K-2\mu & 0 & 3K-2\mu & 0 & 3K+4\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12\mu \end{pmatrix}, \quad d = 3.$$

18.3. Усреднение задачи Коши для уравнений упругости. Рассмотрим оператор $\mathcal{W}_\varepsilon = \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{A}}(g^\varepsilon)$ с быстро осциллирующими коэффициентами. Эффективная матрица g^0 и эффективный оператор $\mathcal{W}^0 = \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{A}}^0$ строятся по общим правилам (см. (6.5), (6.6), (6.8)).

Пусть $Q(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(d \times d)$-матрица, причем

$$Q(\mathbf{x}) > 0; \quad Q, Q^{-1} \in L_\infty.$$

Обычно $Q(\mathbf{x})$ — скалярная функция, имеющая смысл плотности среды. Мы будем считать функцию $Q(\mathbf{x})$ матричнозначной, чтобы учесть возможную анизотропию. Как обычно, $Q^\varepsilon(\mathbf{x}) = Q(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$.

Рассмотрим следующую *задачу Коши для системы теории упругости*:

$$\begin{aligned} Q^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} &= -\mathcal{W}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial\tau}&(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{18.3}$$

где $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$ — заданные функции.

Задача (18.3) имеет вид (15.10). К ней применима теорема 15.4. Усредненная задача имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{Q}\frac{\partial^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} &= -\mathcal{W}^0 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial\tau}&(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{18.4}$$

В силу теоремы 15.4, если $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$, $0 < s \le 2$, то при $\varepsilon \to 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ сходится к $\mathbf{u}_0$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$ при фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$. При этом справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon^{s/2}\left(\mathfrak{C}_s(\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{C}'_s(\tau)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\right), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \le 1.$$

При этом $\mathfrak{C}_s(\tau)$ есть $O(|\tau|^{s/2})$, а $\mathfrak{C}'_s(\tau)$ есть $O(|\tau|^{1+s/2})$ при больших значениях $|\tau|$; $\mathfrak{C}_s(\tau)$ и $\mathfrak{C}'_s(\tau)$ зависят от норм $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|Q\|_{L_\infty}$, $\|Q^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ. При $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\le \varepsilon^{s(1-\alpha)/2}\left(\mathfrak{C}_s(1)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha}\mathfrak{C}'_s(1)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\right), \quad 0 < \varepsilon \le 1. \end{aligned}$$

Здесь $0 < \alpha < \frac{s}{s+2}$ при $\boldsymbol{\psi} \neq 0$ и $0 < \alpha < 1$ при $\boldsymbol{\psi} = 0$.

Если известно лишь, что $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$, то можно утверждать, что при $\varepsilon \to 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ сильно сходится к $\mathbf{u}_0$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$ при фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$. Если же $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$ и $\boldsymbol{\psi} = 0$, то разность $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{u}_0(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha})$ сильно сходится в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$ к нулю при $0 < \alpha < 1$.

Для оператора $\mathcal{W}_\varepsilon$ можно рассмотреть и задачу вида (15.14) с нетривиальной правой частью в уравнении. К такой задаче применима теорема 15.6.

18.4. Тело Хилла. Упругую изотропную среду с постоянным модулем сдвига $\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 = \mathrm{const}$ в механике называют телом Хилла (см., например, [ZhKO]). В этом случае возможна более простая факторизация для оператора $\mathcal{W}$ (см. [BSu2, гл. 5, п. 2.3]). Сейчас форма энергии (18.2) преобразуется к виду

$$w[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \mu_0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |r(\mathbf{u})|^2 \, d\mathbf{x} + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \beta(\mathbf{x}) |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d), \tag{18.5}$$

где

$$r(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right\}.$$

Форма (18.5) допускает (ср. [BSu2, гл. 5, §2]) более экономную запись, нежели в общем случае:

$$w[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle g_\wedge b_\wedge(\mathbf{D}) \mathbf{u}, b_\wedge(\mathbf{D}) \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{C}^{m_\wedge}} \, d\mathbf{x}.$$

Здесь $m_\wedge = 1 + d(d-1)/2$. Опишем $(m_\wedge \times d)$-матрицу $b_\wedge(\boldsymbol{\xi})$. Первая строка в $b_\wedge(\boldsymbol{\xi})$ есть $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$. Остальные строки отвечают (различным) парам индексов (j, l), $1 \le j < l \le d$. В строке, отвечающей паре (j, l), в j-ом столбце стоит ξ_l, в l-ом столбце стоит $(-\xi_j)$; остальные элементы равны нулю. Порядок строк безразличен. Наконец,

$$g_\wedge(\mathbf{x}) = \operatorname{diag} \{\beta(\mathbf{x}), \mu_0/2, \mu_0/2, \dots, \mu_0/2\}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{W} = b_\wedge(\mathbf{D})^* g_\wedge(\mathbf{x}) b_\wedge(\mathbf{D}).$$

Как установлено в [BSu2, гл. 5, п. 2.3], эффективная матрица $g^0_\wedge$ сейчас совпадает с $\underline{g_\wedge}$:

$$g^0_\wedge = \underline{g_\wedge} = \operatorname{diag} \{\underline{\beta}, \mu_0/2, \mu_0/2, \dots, \mu_0/2\}. \tag{18.6}$$

Эффективный оператор сейчас запишется в виде

$$\mathcal{W}^0 = b_\wedge(\mathbf{D})^* g^0_\wedge b_\wedge(\mathbf{D}). \tag{18.7}$$

При выбранной факторизации оператора $\mathcal{W}_\varepsilon = b_\wedge(\mathbf{D})^* g^\varepsilon_\wedge(\mathbf{x}) b_\wedge(\mathbf{D})$ постановка задачи Коши (18.3) остается прежней. В усредненной задаче (18.4) эффективный оператор $\mathcal{W}^0$ задается равенством (18.7) и, благодаря соотношению (18.6), вычисляется явно. Для решений задачи (18.3) в случае тела Хилла справедливы все сформулированные в п. 18.3 утверждения.

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, "Наука", Гл. ред. физ.-мат. л-ры, Москва, 1984, 352 с.

[BeLP] Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolau G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978, 700 p.

[BS] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Оценки разности дробных степеней самосопряженных операторов при неограниченных возмущениях*, Исследования по линейным операторам и теории функций, 18. Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 178 (1989), 120–145.

[BSu1] Birman M., Suslina T., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Oper. Theory: Adv. Appl. **129** (2001), Birkhäuser, p. 71–107.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 5, 69–90.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[BSu6] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла в случае постоянной магнитной проницаемости*, Функц. анализ и его прил. **41** (2007), N 2.

[V] Василевская Е. С., *Усреднение периодических параболических систем с учетом корректора*, готовится к печати.

[Zh] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН **406** (2006), N 5, 597–601.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматгиз, Москва, 1993, 464 с.

[ZhPas] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.

[Ka] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, М., Мир, 1972.

[Pas] Пастухова С. Е., *О некоторых оценках из усреднения задач теории упругости*, Докл. РАН **406** (2006), N 5, 604–608.

[Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), N 4, 86–90.

[Su2] Suslina T. A., *Homogenization of periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl., ser. 2, vol. **220**, 2007, 201–233.

[Su3] Суслина Т. А., *Об усреднении периодической системы Максвелла*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), N 3, 90–94.

[Su4] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла*, Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 5, 162–244.

[Su5] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла с учетом корректора*, Алгебра и анализ **19** (2007), вып. 3, 183–235.

[Sh] Штеренберг Р. Г., *О структуре нижнего края спектра периодического магнитного оператора Шредингера с малым магнитным потенциалом*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 5, 232–243.

С.-Петербургский
государственный университет
Физический факультет
Петродворец, Ульяновская, 3
Санкт-Петербург
198504
Россия
E-mail: mbirman@list.ru
E-mail: suslina@list.ru