О монотонности некоторых функционалов при перестановках

С. В. Банкевич [*] А. И. Назаров [†]

17 ноября 2013 г.

1 Введение

Напомним, что для измеримой функции $u : [-1, 1] \to \mathbb{R}_+$ (здесь и далее $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$) верна формула послойного представления. Именно, положим $\mathcal{A}_t := \{x \in [-1, 1] : u(x) > t\}$. Тогда имеет место равенство $u(x) = \int_0^\infty \chi_{\mathcal{A}_t} dt$.

Определим монотонную перестановку измеримого множества $E \subset [-1, 1]$ и монотонную перестановку неотрицательной функции $u \in W_1^1(-1, 1)$:

$$E^* := [1 - |E|, 1] \qquad u^*(x) := \int_0^\infty \chi_{\mathcal{A}_t^*} dt$$

В тех же условиях можно определить симметричную перестановку (или симметризацию) множества и функции:

$$\overline{E} := [-\frac{|E|}{2}, \frac{|E|}{2}] \qquad \overline{u}(x) := \int_0^\infty \chi_{\overline{\mathcal{A}_t}} dt$$

Определим множество $\mathfrak{F}$ непрерывных функций $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, выпуклых и возрастающих по второму аргументу.

Рассмотрим функционал:

$$I(a, u) = \int_{-1}^1 F(u(x), a(x, u(x)) \, |u'(x)|) dx, \tag{1}$$

где $a : [-1, 1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, $F \in \mathfrak{F}$.

Хорошо известно, что при $a \equiv const$ справедливы неравенства

$$I(a, u^*) \leqslant I(a, u), \qquad u \in W_1^1(-1, 1); \tag{2}$$

$$I(a, \overline{u}) \leqslant I(a, u), \qquad u \in \overset{o}{W}{}_1^1 (-1, 1) \tag{3}$$

(см., например, [3] и цитированную там литературу).

[*] ООО "ИнтеллиДжей Лабс", Россия; Sergey.Bankevich@gmail.com

[†] ПОМИ РАН и Санкт-Петербургский госуниверситет; al.il.nazarov@gmail.com

В работе [2] доказывается неравенство (3) и его многомерный аналог при условии, что функция a четна и выпукла по x. Однако, доказательство содержит пробел, и фактически это неравенство доказано лишь для липшицевых функций u.

Именно, доказывая неравенство (3) для естественного класса функций, автор [2] аппроксимирует функцию $u \in \overset{o}{W}{}_1^1$ с конечным интегралом (1) кусочно линейными функциями u_k и утверждает, что $I(a, u_k) \to I(a, u)$. Однако, это утверждение не обосновано и в общем случае даже неверно. М. А. Лаврентьев в 1926 году построил первый пример интегрального функционала, для которого инфимум по области определения строго меньше инфимума по множеству липшицевых функций. Исторический обзор и простые примеры "одномерных" функционалов, для которых имеет место эффект Лаврентьева, можно найти, например, в монографии [6]. Отметим, что глубокое исследование эффекта Лаврентьева для некоторых классов многомерных функционалов было проведено В. В. Жиковым (см., напр., [7], [8]).

В работе [1] доказано отсутствие эффекта Лаврентьева для функционалов вида $I(a, u) = \int_{-1}^{1} F(u, u')$ и, более того, показано, что для любой $u \in W_1^1(-1, 1)$ существует последовательность липшицевых функций u_k, такая, что

$$u_k \to u \text{ в } W_1^1(-1,1) \quad \text{ и } \quad I(a, u_k) \to I(a, u). \tag{4}$$

Мы модифицируем доказательство из [1] и доказываем отсутствие эффекта Лаврентьева для функционалов вида (1). Это дает возможность восполнить пробел в доказательстве из [2] для одномерного случая. Кроме того, мы устанавливаем необходимость четности и выпуклости веса для выполнения неравенства (3).

Основная часть нашей работы посвящена неравенству (2). Мы находим необходимое и достаточное условие на вес a для выполнения неравенства (2)[1]. При некоторых дополнительных условиях этот результат был анонсирован в [5].

Отметим еще, что неравенство (2) для функционалов, аналогичных (1), рассматривалось в работе [4] при дополнительном ограничении $u(-1) = 0$. При этом ограничении мы также получаем необходимые и достаточные условия выполнения (2). (В [4] предполагалось, что весовая функция убывает по x.)

Статья разделена на восемь параграфов. В §2 выводятся необходимые условия на весовую функцию a для выполнения неравенства (2). В §3 сконцентрированы вспомогательные утверждения для весов, удовлетворяющих необходимым условиям. В §4 неравенство (2) доказано для кусочно линейных функций u. В §5 мы намечаем схему для распространения неравенства (2) на более широкие классы функций u. В §6 мы доказываем неравенство (2) при условии, что вес a сначала возрастает, затем убывает. §7 посвящен доказательству неравенства (2) в общем виде. Наконец, в §8 мы рассматриваем случай симметричной перестановки. Здесь мы получаем необходимые условия на вес, а также завершаем доказательство неравенства (3).

2 Условия, необходимые для выполнения неравенства (2)

Теорема 1. 1 *Если неравенство* (2) *выполняется для некоторой* $F \in \mathfrak{F}$ *и про-*

[1]В частности, неравенство выполнено, если весовая функция a четна и вогнута по x.

извольной кусочно линейной u, то вес a четен по первому аргументу, то есть $a(x,v) \equiv a(-x,v)$.

2 *Если неравенство* (2) *выполняется для произвольной $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, то вес a удовлетворяет неравенству*

$$a(s,v) + a(t,v) \geqslant a(1-t+s,v), \qquad -1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, v \in \mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Доказательство. **1.** Предположим, что $a(x,v) \not\equiv a(-x,v)$. Тогда найдутся такие $\bar{x} \in (-1,1)$ и $\bar{v} \in \mathbb{R}_+$, что

$$a(\bar{x},\bar{v}) < a(-\bar{x},\bar{v}).$$

Поэтому существует $\varepsilon > 0$, такое, что

$$\bar{x} - \varepsilon \leqslant x \leqslant \bar{x}, \bar{v} \leqslant v \leqslant \bar{v} + \varepsilon \Rightarrow a(x,v) < a(-x,v),$$

и можно взять следующую функцию:

$$\begin{cases} u(x) = \bar{v} + \varepsilon, & x \in [-1, \bar{x} - \varepsilon] \\ u(x) = \bar{v} + \bar{x} - x, & x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x}) \\ u(x) = \bar{v}, & x \in [\bar{x}, 1] \end{cases}$$

Тогда $u^*(x,v) = u(-x,v)$ и

$$I(a,u) - I(a,u^*) = \int_{\bar{x}-\varepsilon}^{\bar{x}} F(\bar{v}+\bar{x}-x, a(x,\bar{v}+\bar{x}-x))dx - \int_{-\bar{x}}^{-\bar{x}+\varepsilon} F(\bar{v}+\bar{x}+x, a(x,\bar{v}+\bar{x}+x))dx$$
$$= \int_{\bar{x}-\varepsilon}^{\bar{x}} (F(\bar{v}+\bar{x}-x, a(x,\bar{v}+\bar{x}-x)) - F(\bar{v}+\bar{x}-x, a(-x,\bar{v}+\bar{x}-x)))dx < 0,$$

что противоречит условию. Утверждение **1** доказано.

2. Предположим, что условие (5) не выполняется. Тогда в силу непрерывности функции a найдутся такие $-1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$, $\varepsilon, \delta > 0$ и $\bar{v} \in \mathbb{R}_+$, что для любых $0 \leqslant y \leqslant \varepsilon$ и $\bar{v} \leqslant v \leqslant \bar{v} + \varepsilon$ справедливо неравенство

$$a(s+y,v) + a(t-y,v) + \delta < a(1-t+s+2y,v).$$

Рассмотрим функцию u (см. рис. 1) :

$$\begin{cases} u(x) = \bar{v}, & x \in [-1,s] \cup [t,1] \\ u(x) = \bar{v} + x - s, & x \in [s, s+\varepsilon] \\ u(x) = \bar{v} + \varepsilon, & x \in [s+\varepsilon, t-\varepsilon] \\ u(x) = \bar{v} + t - x, & x \in [t-\varepsilon, t] \end{cases} \tag{6}$$

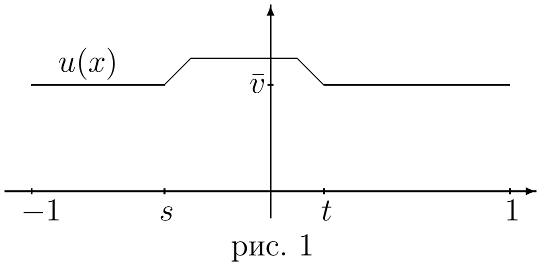

рис. 1

Тогда

$$\begin{cases} u^*(x) = \bar{v}, & x \in [-1, 1-t+s] \\ u^*(x) = \bar{v} + x - s, & x \in [s, s+\varepsilon] \\ u^*(x) = \bar{v} + \dfrac{x-(1-t+s)}{2}, & x \in [1-t+s, 1-t+s+2\varepsilon] \end{cases}$$

(см. рис. 2).

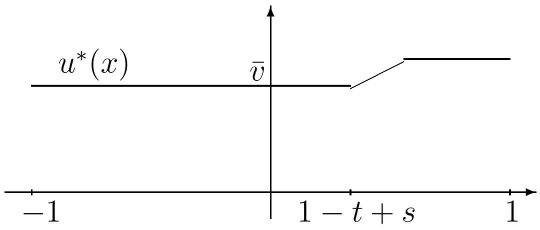

рис. 2

Имеем

$$I(a,u^*) = \int_0^{2\varepsilon} F(u(1-t+s+z), \frac{a(1-t+s+z, u(1-t+s+z))}{2})dz$$
$$= \int_0^{\varepsilon} 2F(\bar{v}+y, \frac{a(1-t+s+2y, \bar{v}+y)}{2})dy$$
$$0 \leqslant I(a,u) - I(a,u^*) = \int_0^{\varepsilon} (F(\bar{v}+y, a(s+y, \bar{v}+y)) + F(\bar{v}+y, a(t-y, \bar{v}+y))$$
$$- 2F(\bar{v}+y, \frac{a(1-t+s+2y, \bar{v}+y)}{2}))dy$$
$$< \int_0^{\varepsilon} (F(\bar{v}+y, a(s+y, \bar{v}+y)) + F(\bar{v}+y, a(t-y, \bar{v}+y))$$
$$- 2F(\bar{v}+y, \frac{a(s+y, \bar{v}+y) + a(t-y, \bar{v}+y) + \delta}{2}))dy =: J.$$

Рассмотрим теперь функцию $F(v,p) = p^\alpha$. Очевидно, что при $\alpha = 1$ выполнено неравенство

$$\frac{F(v,p) + F(v,q)}{2} - F(v, \frac{p+q}{2} + \frac{\delta}{2}) < 0. \tag{7}$$

Нас интересуют p, q, лежащие на компакте $[0, \max\limits_{(x,v)} a]$, где $(x,v) \in [-1,1] \times u([-1,1])$. Значит найдется такое $\alpha > 1$, что неравенство (7) будет продолжать выполняться. Например, подходит любое $1 < \alpha < (\log_2 \frac{2A}{A+\delta})^{-1}$.

Тем самым, мы подобрали строго выпуклую по второму аргументу функцию F, для которой $J \leqslant 0$. Это противоречие доказывает утверждение **2**. $\square$

Замечание 1. *Видно, что в доказательстве второго пункта теоремы функцию u на отрезке $[-1, s]$ можно заменить на любую возрастающую функцию. Тем самым, условие* (5) *является необходимым и для выполнения неравенства* (2) *в случае закрепленных на левом конце функций:* $u(-1) = 0$.

Замечание 2. *Если функция a неотрицательна, а также четна и вогнута по первому параметру, то она удовлетворяет условию* (5). *Действительно: для любых s, t и u выполнено $a(1,u)-a(s,u) \leqslant a(t,u)-a(-1+t-s,u)$. А так как $a(1,u) \geqslant 0$, то получаем $a(s,u)+a(t,u) \geqslant a(-1+t-s,u) = a(1-t+s,u)$. Обратное вообще говоря неверно, то есть не всякая четная неотрицательная функция, удовлетворяющая* (5), *вогнута.*

3 Свойства весовой функции

Для краткости в этом параграфе будем опускать второй аргумент у функции a.

Лемма 1. *Рассмотрим непрерывную функцию $a \geqslant 0$, заданную на $[-1,1]$, и удовлетворяющую условию (5). Тогда для любых $-1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1$ верно*

$$\sum_{k=1}^{n} a(t_k) \geqslant a(1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k), \qquad \text{для четных } n,$$
$$\sum_{k=1}^{n} a(t_k) \geqslant a(-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k), \qquad \text{для нечетных } n.$$

Доказательство. Будем доказывать по индукции. Для $n=1$ утверждение тривиально. Пусть теперь n четное. Тогда, по предположению индукции, $\sum_{k=1}^{n-1} a(t_k) \geqslant a(-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k t_k)$. Значит

$$\sum_{k=1}^{n-1} a(t_k) + a(t_n) \geqslant a(-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k t_k) + a(t_n) \geqslant a(1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k).$$

В случае нечетного n воспользуемся предположением индукции в следующем виде: $\sum_{k=2}^{n} a(t_k) \geqslant a(1+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k t_k)$. Тогда

$$a(t_1)+\sum_{k=2}^{n} a(t_k) \geqslant a(t_1)+a(1+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k t_k) \geqslant a(-\sum_{k=2}^{n}(-1)^k t_k + t_1) = a(-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k).$$

□

Замечание 3. *Если вдобавок к условию леммы предположить, что функция a четна, то выполняются также следующие неравенства:*

$$\sum_{k=1}^{n} a(t_k) \geqslant a(-1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k), \qquad \text{для четных } n,$$
$$\sum_{k=1}^{n} a(t_k) \geqslant a(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k), \qquad \text{для нечетных } n.$$

Лемма 2. 1. *Пусть функция a удовлетворяет условию* (5). *Если найдется такое $x_0 \in [-1,1]$, что $a(x_0)=0$, то либо $a\Big|_{[x_0,1]} \equiv 0$, либо множество нулей функции a периодично на $[x_0,1]$, причем период нацело делит $1-x_0$.*

2. *Пусть функция a удовлетворяет условию* (5) *и четна. Если найдется такое $x_0 \in [-1, 1]$, что $a(x_0) = 0$, то либо $a \equiv 0$, либо функция a периодична на отрезке $[-1, 1]$, причем период нацело делит $1 - x_0$.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что если для некоторых $s \leqslant t$ выполнено $a(s) = a(t) = 0$, то неравенство (5) влечет

$$0 = a(s) + a(t) \geqslant a(1 - (t - s)) \geqslant 0,$$

то есть $a(1 - (t - s)) = 0$.

Точно так же, если $s \leqslant 1 - t$ и $a(s) = a(1 - t) = 0$, то $a(s + t) = 0$.

Из этих двух фактов следует, что если $a(s) = a(t) = 0$, то $a(s + k(t - s)) = 0$ для всех натуральных k, для которых $s + k(t - s) \leqslant 1$.

1. Полагая $s = t = x_0$, получим $a(1) = 0$.

Далее, пусть $x_1 > x_0$ - ближайший к x_0 корень функции a. Если такого нет, то, в силу сказанного выше, $a = 0$ на плотном в $[x_0, 1]$ множестве, и по непрерывности $a\Big|_{[x_0,1]} = 0$. В противном случае должно найтись такое натуральное K, что $x_0 + K(x_1 - x_0) = 1$, иначе мы сможем получить периодичность нулей с меньшим периодом.

Предположим теперь, что найдется корень $x_2 > x_0$, не совпадающий ни с одним из построенных ранее корней. Тогда, в силу сказанного выше, найдется корень $x_3 \in (1 - (x_1 - x_0), 1)$, а поэтому и корень $x_4 \in (x_0, x_1)$, что приводит к противоречию.

2. Из предыдущего пункта и четности следует периодичность множества нулей на всем отрезке $[-1, 1]$. Обозначим расстояние между соседними нулями Δ.

Тогда для произвольного $-1 \leqslant x \leqslant 1 - \Delta$ выполнено

$$a(x) = a(x) + a(1 - \Delta) \geqslant a(x + \Delta).$$

С другой стороны, $-1 \leqslant -(x + \Delta) \leqslant 1 - \Delta$, и выполнено

$$a(x + \Delta) = a(-(x + \Delta)) + a(1 - \Delta) \geqslant a(-x) = a(x).$$

Тем самым, $a(x) = a(x + \Delta)$. □

Лемма 3. *Пусть функции a_1 и a_2 удовлетворяют неравенству* (5). *Тогда функции $a(x) = \max(a_1(x), a_2(x))$ и $a_1(x) + a_2(x)$ тоже ему удовлетворяет.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} a(1 + s + t) = \max(a_1(1 + s + t), a_2(1 + s + t)) &\leqslant \max(a_1(s) + a_1(t), a_2(s) + a_2(t)) \\ &\leqslant \max(a_1(s), a_2(s)) + \max(a_1(t), a_2(t)) = a(s) + a(t). \end{aligned}$$

Утверждение для второй функции очевидно. □

Лемма 4. *Пусть функция a удовлетворяет неравенству* (5), $k \in \mathbb{N}$. *Тогда кусочно линейная функция a_k, интерполирующая функцию a по узлам $(-1 + \frac{2i}{k})$, $i = 0, 1, \ldots, k$, тоже удовлетворяет неравенству* (5).

Доказательство. Пусть $s = -1 + \frac{2i}{k}$, $t = -1 + \frac{2j}{k}$. Тогда неравенство выполняется для a_k, потому что оно выполняется для a, а в этих точках они совпадают.

Пусть теперь $s = -1 + \frac{2i}{k}$, и $t \in [-1 + \frac{2j}{k}, -1 + \frac{2(j+1)}{k}]$.

Рассмотрим линейную функцию $h_1(t) = a_k(1 - t + s) - a_k(t) - a_k(s)$. Из уже доказанного следует, что $h_1(-1 + \frac{2j}{k}) \leqslant 0$ и $h_1(-1 + \frac{2(j+1)}{k}) \leqslant 0$. Значит, поскольку h_1 линейна, $h_1(t) \leqslant 0$. Тем самым, неравенство выполняется для любого $s \in -1 + \frac{2i}{k}$ и $t \in [-1, 1]$.

Рассмотрим функцию $h_2(y) = a_k(\frac{2j}{k}) - a_k(s - y) - a_k(t + y)$, где $1 - t + s = \frac{2j}{k}$. Предположим, $s + y_0$ — один из узлов интерполяции, тогда $t + y_0$ тоже будет узлом интерполяции. Тем самым, $h_2(y_0) = a(\frac{2j}{k}) - a(s - y) - a(t + y) \leqslant 0$. В промежутках между такими y_0 функция h_2 линейна, границы области определения h_2 приходятся на узлы интерполяции, значит $h_2(y) \leqslant 0$ на всей области определения.

Рассмотрим функцию $h_3(s) = a_k(1-t+s) - a_k(t) - a_k(s)$ для произвольного фиксированного $t \in [-1, 1]$. Эта функция кусочно линейна, изломы на ней встречаются каждый раз, когда либо s, либо $1 - t + s$ приходится на узел интерполяции. Однако, мы уже доказали, что в этих точках $h_3(s) \leqslant 0$. Границы области определения h_3 приходятся на узлы интерполяции, тем самым, $h_3(s) \leqslant 0$ всюду. □

4 Результат на кусочно линейных функциях

В этом параграфе мы докажем неравенство (2) для кусочно линейных функций. Не умаляя общности, будем считать, что $F(\cdot, 0) \equiv 0$.

Теорема 2. *Пусть функция a четна и удовлетворяет условию* (5)*. Тогда, если u — неотрицательная кусочно линейная функция, то $I(a, u) \geqslant I(a, u^*)$.*

Доказательство. Положим $-1 = x_1 < x_2 < \cdots < x_K = 1$ — множество точек перелома функции u. Рассмотрим множество U значений функции u, не являющихся образами конечных точек линейных участков: $U := u([-1, 1]) \setminus \{u(x_1), \ldots, u(x_K)\}$. Множество U представляет собой объединение конечного числа интервалов $U = \cup_{j=1}^{N} G_j$.

Обозначим m_j число прообразов значения $u_0 \in G_j$, то есть число решений уравнения $u(y) = u_0$ (очевидно, это число постоянно для $u_0 \in G_j$). Легко видеть, что эти прообразы являются линейными функциями u_0: $y = y_k^j(u_0)$, $k = 1, \ldots, m_j$, и ${y_k^j}'(u(y)) = \frac{1}{u'(u)}$. Мы будем считать, что $y_1^j(u_0) < y_2^j(u_0) < \cdots < y_{m_j}^j(u_0)$.

Решение уравнения $u^*(y^*) = u_0$ ($u_0 \in U$) можно выразить через y_k^j:

$u(-1) < u_0$	m_j четно	$y^* = 1 - \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j$
	m_j нечетно	$y^* = - \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j$
$u(-1) > u_0$	m_j четно	$y^* = -1 + \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j$
	m_j нечетно	$y^* = \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j$

Положим $y^*(v) = (u^*)^{-1}(v)$. Тогда $y^{*\prime}(v) = \sum_{k=1}^{m_j} \left|y_k^{j\prime}(v)\right|$ при $u \in G_j$, поскольку знаки в выражении для y^* и знаки y_k^j чередуются, и $y^{*\prime}(v) \geqslant 0$.

Множества нулей $u'(x)$ и $u^{*\prime}(x)$ могут иметь ненулевую меру. Однако, они не вносят вклада в интеграл, поскольку $F(u(x), 0) = 0$.

Рассмотрим оставшиеся части интегралов:

$$I(a,u) = \sum_{j=1}^{N} \int_{u^{-1}(G_j)} F(u(x), a(x,u(x))\,|u'(x)|) dx$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \int_{G_j} \sum_{k=1}^{m_j} F\Big(v, \frac{a(y_k^j(v), v)}{\left|y_k^{j\prime}(v)\right|}\Big) \left|y_k^{j\prime}(v)\right| dv,$$

$$I(a,u^*) = \sum_{j=1}^{N} \int_{(u^*)^{-1}(G_j)} F(u^*(x), \left|a(x,u(x)) u^{*\prime}(x)\right|) dx$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \int_{G_j} F\Big(v, \frac{a(y^*(v), v)}{\sum_{k=1}^{m_j} \left|y_k^{j\prime}(v)\right|}\Big) \sum_{k=1}^{m_j} \left|y_k^{j\prime}(v)\right| dv.$$

Зафиксируем j и v в правых частях и докажем неравенство для подынтегральных выражений. Обозначим $b_k := |y_k^{j\prime}(v)|$, $y_k := y_k^j(v)$, $y^* := y^*(v)$, $m := m_j$. Тогда требуемое утверждение имеет вид:

$$T := \sum_{k=1}^{m} b_k F\Big(v, \frac{a(y_k, v)}{b_k}\Big) \geqslant F\Big(v, \frac{a(y^*, v)}{\sum_{k=1}^{m} b_k}\Big) \sum_{k=1}^{m} b_k$$

С помощью неравенства Йенсена для функции $F(v, \cdot)$ получаем

$$T \geqslant F\Big(v, \frac{\sum_{k=1}^{m} a(y_k, v)}{\sum_{k=1}^{m} b_k}\Big) \sum_{k=1}^{m} b_k.$$

Тогда нам достаточно установить $\sum_{k=1}^{m} a(y_k, v) \geqslant a(y^*, v)$, что верно с учетом леммы 1 и замечания 3. $\square$

Замечание 4. *В работе [4] неравенство* (2) *доказывается при дополнительном условии* $u(-1) = 0$ *для весовых функций* a, *убывающих по* x. *Несложно видеть, что при этом условии доказательство теоремы* 2 *проходит для весов, удовлетворяющих условию* (5) *без условия четности, поскольку в этом случае* $u(-1) < u_0$, *и нам требуются только два неравенства из четырех, которые и дает лемма* 1. *Очевидно также, что условие* (5) *слабее, чем условие убывания* a *по* x.

5 О расширении класса функций, для которых выполняется $I(a, u^*) \leqslant I(a, u)$

Лемма 5. *Пусть функция* a *непрерывна. Тогда функционал* $I(a, u)$ *слабо полунепрерывен снизу в* $W_1^1(-1, 1)$.

Доказательство. Пусть $u_m \rightharpoonup u$ в $W_1^1(-1, 1)$. Обозначим $A = \underline{\lim}\, I(a, u_m) \geqslant 0$. Наша задача — доказать $I(a, u) \leqslant A$. Если $A = \infty$, то утверждение тривиально, так что можно считать $A < \infty$. Переходя к подпоследовательности, добиваемся $A = \lim I(a, u_m)$. Из слабой сходимости заключаем, что найдется R_0 такое, что $\|u_m\|_{W_1^1(-1,1)} \leqslant R_0$.

Известно, что $W_1^1(-1, 1)$ компактно вкладывается в $L_1(-1, 1)$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $u_m \to u$ в $L_1(-1, 1)$ и $u_m(x) \to u(x)$ почти всюду. Тогда по теореме Егорова для любого ε найдется множество G_ε^1 такое, что $|G_\varepsilon^1| < \varepsilon$ и $u_m \rightrightarrows u$ в $[-1, 1] \setminus G_\varepsilon^1$.

Из равномерной сходимости $\exists K : \forall m > K \ \ |u_m| \leqslant |u| + \varepsilon$ в $[-1, 1] \setminus G_\varepsilon^1$. Возьмем $G_\varepsilon^2 = \{x \in [-1, 1] \setminus G_\varepsilon^1 : |u(x)| \geqslant \frac{R_0+\varepsilon}{\varepsilon}\}$. Тогда

$$R_0 \geqslant \int_{-1}^{1} |u(x)|\, dx \geqslant \int_{G_\varepsilon^2} |u(x)|\, dx \geqslant \int_{G_\varepsilon^2} \frac{R_0+\varepsilon}{\varepsilon} dx = \left|G_\varepsilon^2\right| \frac{R_0+\varepsilon}{\varepsilon}$$

То есть $|G_\varepsilon^2| \leqslant \varepsilon \frac{R_0}{R_0+\varepsilon} < \varepsilon$. Вне множества $G_\varepsilon := G_\varepsilon^1 \cup G_\varepsilon^2$ функции u_m, $m > K$, равномерно сходятся и равномерно ограничены.

Из непрерывности F и a следует, что для произвольных ε и R найдется такое $N(\varepsilon, R)$, что если $x \in [-1, 1] \setminus G_\varepsilon$, $|M| \leqslant R$ и $m > N(\varepsilon, R)$, то

$$|F(u_m(x), a(x, u_m(x))M) - F(u(x), a(x, u(x))M)| < \varepsilon.$$

Рассмотрим множества $E_{m,\varepsilon} := \{x \in [-1, 1] : |u_m'(x)| \geqslant \frac{R_0}{\varepsilon}\}$. Имеем

$$R_0 \geqslant \int_{-1}^{1} |u_m'(x)|\, dx \geqslant \int_{E_{m,\varepsilon}} |u_m'(x)|\, dx \geqslant \int_{E_{m,\varepsilon}} \frac{R_0}{\varepsilon} dx = \frac{R_0}{\varepsilon} |E_{m,\varepsilon}| .$$

Поэтому $|E_{m,\varepsilon}| \leqslant \varepsilon$.

Теперь можно ввести $L_{m,\varepsilon} := [-1, 1] \setminus (E_{m,\varepsilon} \cup G_\varepsilon)$. Тогда $|L_{m,\varepsilon}| \geqslant 2 - 3\varepsilon$.

Зафиксируем $R := \frac{R_0}{\varepsilon}$, $N(\varepsilon) := N(\varepsilon, \frac{R_0}{\varepsilon})$. Для любых $\varepsilon > 0$, $x \in L_{m,\varepsilon}$ и $m > N(\varepsilon)$ получим

$$\Big|F(u_m(x), a(x, u_m(x))\, |u_m'(x)|) - F(u(x), a(x, u(x))\, |u_m'(x)|)\Big| < \varepsilon,$$

откуда

$$\int_{L_{m,\varepsilon}} \Big| F(u_m(x), a(x, u_m(x))\, |u_m'(x)|) - F(u(x), a(x, u(x))\, |u_m'(x)|) \Big| dx < 2\varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^j}$ $(j \geqslant 1)$, $m_j = N(\varepsilon_j) + j \to \infty$ и $L_\varepsilon = \bigcap L_{m_j,\varepsilon_j}$. Тогда $\sum \varepsilon_j = \varepsilon$ и $|[-1,1] \setminus L_\varepsilon| < 3\varepsilon$. Теперь можно заключить, что

$$\int_{L_\varepsilon} \Big| F(u_{m_j}(x), a(x, u_{m_j}(x))|u_{m_j}'(x)|) - F(u(x), a(x, u(x))|u_{m_j}'(x)|) \Big| dx < 2\varepsilon_j.$$

Имеем

$$\begin{aligned} A = \lim I(a, u_{m_j}) &= \lim \int_{-1}^{1} F(u_{m_j}(x), a(x, u_{m_j}(x))|u_{m_j}'(x)|)dx \\ &\geqslant \varliminf \int_{-1}^{1} \chi_{L_\varepsilon}(x) F(u(x), a(x, u(x))|u_{m_j}'(x)|)dx =: \varliminf J_\varepsilon(u_{m_j}'). \end{aligned}$$

Наш новый функционал

$$J_\varepsilon(v) = \int_{-1}^{1} \chi_{L_\varepsilon}(x) F(u(x), a(x, u(x))|v(x)|)dx$$

выпуклый. Вновь переходя к подпоследовательности (будем обозначать ее u_k), можно считать, что $\varliminf J_\varepsilon(u_{m_j}') = \lim J_\varepsilon(u_k')$. Так как $u_k' \rightharpoonup u'$ в L_1, то можно подобрать последовательность выпуклых комбинаций u_k', которые будут сходиться к u' сильно (см. [10, Теорема 3.13]). А именно: найдутся $\alpha_{k,l} \geqslant 0$ для $k \in \mathbb{N}$, $l \leqslant k$ такие, что $\sum_{l=1}^{k} \alpha_{k,l} = 1$ для каждого k и $w_k = \sum_{l=1}^{k} \alpha_{k,l} u_l' \to u'$ в L_1. Кроме того, очевидно, можно потребовать, чтобы минимальный индекс l ненулевого коэффициента $\alpha_{k,l}$ стремился к бесконечности по k. Тогда

$$\lim J_\varepsilon(u_k') = \lim \sum_{l=1}^{k} \alpha_{k,l} J_\varepsilon(u_l').$$

В силу выпуклости J_ε, имеем

$$\sum_{l=1}^{k} \alpha_{k,l} J_\varepsilon(u_l') \geqslant J_\varepsilon(w_k).$$

Наконец, поскольку $w_k \to u'$ в $L_1(-1,1)$, переходя к подпоследовательности, можем считать, что $w_k(x) \to u'(x)$ п.в. Кроме того, так как в L_ε выполнено $\left|u_j'(x)\right| < \frac{R_0}{\varepsilon}$, то и $|w_k(x)| < \frac{R_0}{\varepsilon}$. Значит,

$$F(u(x), a(x, u(x))w_k(x)) \leqslant \max_{(x,M)} F(u(x), a(x, u(x))M) < \infty,$$

где максимум берется по компактному множеству $(x, M) \in [-1,1] \times [-\frac{R_0}{\varepsilon}, \frac{R_0}{\varepsilon}]$. Поэтому применима теорема Лебега, и мы получаем $\lim J_\varepsilon(w_k) = J_\varepsilon(u')$. Таким образом,

$$A \geqslant \lim J_\varepsilon(u_k') = \lim \sum_{l=1}^{k} \alpha_{k,l} J_\varepsilon(u_l') \geqslant \varliminf J_\varepsilon(w_k) = J_\varepsilon(u').$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $A \geqslant I(a, u)$. $\square$

Лемма 6. *Пусть $A \subset W_1^1(-1,1)$. И пусть $B \subset A$ таково, что $\forall v \in B$ выполнено $I(a,v^*) \leqslant I(a,v)$. Предположим, что для каждого $u \in A$ найдется последовательность $u_k \in B$ такая, что $u_k \to u$ в $W_1^1(-1,1)$ и $I(a,u_k) \to I(a,u)$. Тогда $\forall u \in A$ будет выполнено $I(a,u^*) \leqslant I(a,u)$.*

Доказательство. Возьмем некоторую $u \in A$ и для нее найдем соответствующие $u_k \in B$. По условию $I(a,u_k^*) \leqslant I(a,u_k) \to I(a,u)$. В [2, Теорема 1] показано, что из $u_k \to u$ в $W_1^1(-1,1)$ следует $\overline{u_k} \rightharpoonup \overline{u}$ в $W_1^1(-1,1)$. Но $u_k^*(x) = \overline{u_k}(\frac{x-1}{2})$ и $u^*(x) = \overline{u}(\frac{x-1}{2})$. Значит, и $u_k^* \rightharpoonup u^*$. Тогда из слабой полунепрерывности снизу функционала I заключаем $I(a,u^*) \leqslant \underline{\lim} I(a,u_k^*)$. Тем самым, $I(a,u^*) \leqslant I(a,u)$. □

Следствие 1. *Пусть вес a непрерывен, и неравенство* (2) *верно для неотрицательных кусочно линейных функций u. Тогда оно верно для всех неотрицательных липшицевых функций.*

Доказательство. Ввиду теоремы 1 из §6.6 [12] липшицеву функцию можно почти всюду вместе с производной приблизить непрерывно дифференцируемыми. Поскольку производные приближающих функций будут равномерно ограничены, по теореме Лебега последовательность будет сходиться в $W_1^1(-1,1)$, а также будет сходиться функционал I. В свою очередь, непрерывно дифференцируемые функции можно равномерно вместе с производной приблизить кусочно линейными. Такая сходимость обеспечивает сходимость в $W_1^1(-1,1)$ и сходимость функционала I. Применив лемму 6, получаем требуемое. □

6 Переход к W_1^1-функциям при дополнительном ограничении на вес

В этом параграфе мы получим неравенство (2) при дополнительном условии монотонности весовой функции при $x \in [-1,0]$ и при $x \in [0,1]$.

Лемма 7. *Пусть a — непрерывная функция, $a(\cdot,u)$ возрастает на $[-1,0]$ и убывает на $[0,1]$ для всех $u \geqslant 0$. Тогда любая функция $u \in W_1^1(-1,1)$, $u \geqslant 0$, приближается липшицевыми функциями по функционалу I, то есть существует последовательность $u_k \in Lip[-1,1]$, такая, что выполнено соотношение* (4).

Доказательство. Можно считать, что $I(a,u) < \infty$.

Вес a возрастает по x при $x \in [-1,0]$ и убывает при $x \in [0,1]$. Докажем утверждение для функционала

$$I_2(u) = \int_0^1 F(u(x), a(x,u(x))|u'(x)|)dx,$$

а случай $[-1,0]$ сведем к первому:

$$I_1(u) = \int_{-1}^0 F(u(x), a(x,u(x))|u'(x)|)dx = \int_0^1 F(u(-z), a(-z,u(-z))|u'(-z)|)dz.$$

Для доказательства мы модифицируем схему из [1, Теорема 2.4]. Доказательство частично совпадает с [1], но для удобства читателя мы приводим здесь его полностью.

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 1. [*1, Lemma*2.7]. *Пусть* $\varphi_h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *— последовательность липшицевых функций, удовлетворяющих условиям:* $\varphi_h' \geqslant 1$ *для почти всех* x *и всех* h, $\varphi_h(x) \to x$ *для почти каждого* x. *Тогда для любой* $f \in L_1(\mathbb{R})$ $f(\varphi_h) \to f$ *в* $L_1(\mathbb{R})$.

Для $h \in \mathbb{N}$ покроем множество $\{x \in [0,1] : |u'(x)| > h\}$ открытым множеством A_h. Не умаляя общности, можно считать, что $A_{h+1} \subset A_h$ и $|A_h| \to 0$ при $h \to \infty$. В качестве v_h возьмем функцию, совпадающую с u вне множества A_h. На связных участках A_h сделаем v_h линейной. Тогда $v_h \to u$ в W_1^1. Изменим немного v_h, чтобы сделать аппроксимацию липшицевой.

Представим $A_h = \cup_k \Omega_{h,k}$, где $\Omega_{h,k} = (b_{h,k}^-, b_{h,k}^+)$. Обозначим

$$\alpha_{h,k} := |\Omega_{h,k}|\,, \quad \beta_{h,k} := v_h(b_{h,k}^+) - v_h(b_{h,k}^-) = u(b_{h,k}^+) - u(b_{h,k}^-).$$

Тогда $v_h' = \frac{\beta_{h,k}}{\alpha_{h,k}}$ в $\Omega_{h,k}$. Заметим, что

$$\sum_k |\beta_{h,k}| \leqslant \int_{A_h} |u'|\,dx \leqslant \|u'\|_{L_1(-1,1)} < \infty,$$

а значит, $\sum_k |\beta_{h,k}| \to 0$ при $h \to 0$ по теореме Лебега.

Определим функцию $\varphi_h \in W_1^1(0,1)$ так:

$$\begin{aligned} &\varphi_h(0) = 0 \\ &\quad \varphi_h' = 1 && \text{в } [0,1] \setminus A_h, \\ &\quad \varphi_h' = \max\left(\frac{|\beta_{h,k}|}{\alpha_{h,k}}, 1\right) && \text{в } \Omega_{h,k}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\int_0^1 |\varphi_h'|\,dx \leqslant 1 + \sum_k |\beta_{h,k}| < \infty$.

Покажем, что $\varphi_h' \to 1$ в $L_1(0,1)$:

$$\int |\varphi_h' - 1|\,dx = \sum \left(\max\left(\frac{|\beta_{h,k}|}{\alpha_{h,k}}, 1\right) - 1\right)\alpha_{h,k} \leqslant \sum |\beta_{h,k}| \to 0.$$

Отсюда следует, что φ_h удовлетворяет условиям предложения 1.

Рассмотрим теперь $\varphi_h^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ — ограничение обратной к φ_h функции на $[0,1]$. Для нее верно $0 \leqslant (\varphi_h^{-1})' \leqslant 1$ и

$$\begin{aligned} &\varphi_h^{-1}(0) = 0 \\ &(\varphi_h^{-1})' = 1 && \text{в } [0,1] \setminus \varphi_h(A_h), \\ &(\varphi_h^{-1})' = \min\left(\frac{\alpha_{h,k}}{|\beta_{h,k}|}, 1\right) && \text{в } [0,1] \cap \varphi_h(\Omega_{h,k}). \end{aligned}$$

Возьмем $u_h = v_h(\varphi_h^{-1})$. Заметим, что $u_h(0) = u(0)$, и

$$\begin{aligned} u_h' &= v_h'(\varphi_h^{-1}) \cdot (\varphi_h^{-1})' = u'(\varphi_h^{-1}) && \text{в } [0,1] \setminus \varphi_h(A_h), \\ u_h' &= v_h'(\varphi_h^{-1}) \cdot (\varphi_h^{-1})' = \operatorname{sign} \beta_{h,k} \cdot \min\left(1, \frac{|\beta_{h,k}|}{\alpha_{h,k}}\right) && \text{в } [0,1] \cap \varphi_h(\Omega_{h,k}). \end{aligned}$$

Тем самым, u_h липшицева, поскольку u имеет вне A_h ограниченную производную.

Покажем, что $u_h \to u$ в $W_1^1(0,1)$. Для этого достаточно оценить

$$\|u_h' - u'\|_{L_1} \leqslant \int_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} |u_h' - u'| + \int_{[0,1]\cap\varphi_h(A_h)} |u_h'| + \int_{[0,1]\cap\varphi_h(A_h)} |u'| =: P_h^1 + P_h^2 + P_h^3.$$

$$P_h^1 = \int_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} \left|u'(\varphi_h^{-1}) - u'\right| dx = \int_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h} |u' - u'(\varphi_h)|\, dz \leqslant \int_{[0,1]} |u' - u'(\varphi_h)|\, dz.$$

В силу предложения 1, $P_h^1 \to 0$.

Далее,

$$P_h^2 \leqslant |\varphi_h(A_h)| = \sum |\varphi_h(\Omega_{h,k})| = \sum \max(|\beta_{h,k}|, \alpha_{h,k}) \leqslant \sum \alpha_{h,k} + \sum |\beta_{h,k}| \to 0.$$

Наконец, $P_h^3 \to 0$ по абсолютной непрерывности интеграла, и утверждение доказано.

Осталось показать, что $I_2(u_h) \to I_2(u)$.

$$I_2(u_h) = \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} F(u_h(x), a(x, u_h(x))|u_h'(x)|)dx + \int\limits_{[0,1]\cap\varphi_h(A_h)} F(u_h(x), a(x, u_h(x))|u_h'(x)|)dx.$$

Обозначим эти слагаемые $\hat{P}_h^1$ и $\hat{P}_h^2$. Так как $u \in W_1^1(0,1)$, то $u \in L_\infty([0,1])$. Обозначим $\|u\|_\infty = r$, тогда $\|u_h\|_\infty < 2r$ при достаточно больших h. Кроме того, $|u_h'| \leqslant 1$ почти всюду в $\varphi_h(A_h)$. Тогда $\hat{P}_h^2 \leqslant M_F\, |\varphi_h(A_h)| \to 0$, где

$$M_F = \max_{[-2r,2r]\times[-M_a,M_a]} F; \quad M_a = \max_{[0,1]\times[-2r,2r]} a.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \hat{P}_h^1 = \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} & F(u(\varphi_h^{-1}(x)), a(x, u(\varphi_h^{-1}(x))|u'(\varphi_h^{-1}(x))(\varphi_h^{-1})'|)dx \\ &= \int\limits_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h} F(u(z), a(\varphi_h(z), u(z))|u'(z)|)dz \\ &= \int\limits_{[0,1]} F(u(z), a(\varphi_h(z), u(z))|u'(z)|)\chi_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h} dz. \end{aligned}$$

Последнее равенство, вообще говоря, не имеет смысла, так как $\varphi_h(z)$ может принимать значения вне $[0,1]$. Определим $a(z,u) = a(1,u)$ при $z > 1$. Теперь выражение корректно. Заметим, что $\chi_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h}$ возрастают, так как множества $\varphi_h^{-1}([0,1])$ возрастают и A_h убывают, то есть $\varphi_{h_1}^{-1}([0,1]) \subset \varphi_{h_2}^{-1}([0,1])$ и $A_{h_1} \supset A_{h_2}$ при $h_1 \leqslant h_2$. На отрезке $[0,1]$ (и даже $\varphi_h([0,1])$) a убывает, значит $a(\varphi_h(z))$ будет расти по h, так как $\varphi_h(z)$ убывает по h. В таком случае можно применить теорему о монотонной сходимости и получить

$$\hat{P}_h^1 \to \int_{[0,1]} F(u(z), a(z,u(z))|u'(z)|)dz.$$

$\square$

Замечание 5. *Очевидно, что те же рассуждения с закреплением функции и на левом конце можно провести на любом интервале* $[x_0, x_1]$, *где вес* a *убывает по* x. *То есть получить на этом интервале последовательность*

$$u_h \to u \text{ в } W_1^1(x_0,x_1);$$
$$\int_{x_0}^{x_1} F(u_h(x), a(x,u_h(x))\,|u_h'(x)|) \to \int_{x_0}^{x_1} F(u(x), a(x,u(x))\,|u'(x)|).$$

Аналогично, если a *возрастает по* x, *можно аппроксимировать и с закреплением на правом конце.*

Следствие 2. *Пусть функция* a *непрерывна, четна, удовлетворяет неравенству* (5) *и убывает на* $[0,1]$. *Тогда для любой* $u \in W_1^1(-1,1)$ *выполнено* $I(a,u^*) \leqslant I(a,u)$.

Доказательство. Неравенство немедленно следует из лемм 6 и 7. $\square$

7 Получение результата в общем случае

Теперь мы хотим избавиться от условия монотонности веса по x. Мы будем это делать в несколько этапов.

Для начала отметим, что все свойства функции a интересуют нас лишь в окрестности графиков функций u, u^*.

Введем следующие ограничения на весовую функцию:

$(H1)$ $a(x,v)$ четна по x и удовлетворяет неравенству (5), а также $I(a,u) < \infty$.

$(H2)$ На множестве $v \in [\min u(x), \max u(x)]$, для которых $a(\cdot, v) \not\equiv 0$, количество нулей функций $a(\cdot, v)$ ограничено константой, не зависящей от v.

$(H3)$ Если $a(x_0, u(x_0)) = 0$ для некоторого x_0, то $a(\cdot, u(x_0)) \equiv 0$. Кроме того, выполнено $\lim_{k\to\infty} D_k(a, U(a)) = 0$, где

$$U(a) := \{v \in [\min u(x), \max u(x)] : a(\cdot, v) \not\equiv 0\},$$

$$D_k(a,U) := \sup_{v\in U} \frac{\max\limits_{|x_1-x_2|\leqslant \frac{2}{k}} |a(x_1,v)-a(x_2,v)|}{\min\limits_{\operatorname{dist}(x,u^{-1}(v))\leqslant \frac{2}{k}} a(x,v)}. \tag{8}$$

$(H4)$ Найдется такое четное k, что $a(\cdot,v)$ линейны для каждого v на участках $[-1+\frac{2i}{k}, -1+\frac{2(i+1)}{k}]$.

$(H5)$ Множество $v\in\mathbb{R}$, для которых $a(\cdot,v)$ имеет участки постоянства, отличается от множества $v\in\mathbb{R}$ таких, что $a(\cdot,v)\equiv 0$, лишь на множество меры 0.

$(H6)$ Отрезок $[-1,1]$ можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых в v-окрестности графика $u(x)$ вес a не меняет монотонности по x.

$(H7)$ Пусть $x_1<x_2<x_3$, и на $[x_1,x_2]$ вес $a(\cdot,v)$ в v-окрестности графика функции u убывает, а на $[x_2,x_3]$ возрастает. Тогда в некоторой окрестности точки $u(x_2)$ имеем $a(\cdot,v)\equiv 0$.

Вес, удовлетворяющий условию $(H1)$, мы будем называть допустимым для заданной функции $u(x)$.

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение нашей работы.

Теорема 3. *Пусть $F\in\mathfrak{F}$, функция $u\in W_1^1(-1,1)$ неотрицательна, и весовая функция $a:[-1,1]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ непрерывна и допустима для u. Тогда справедливо неравенство* (2).

Мы докажем неравенство (2) при условиях $(H1)-(H7)$, а затем будем избавляться от лишних условий.

Для доказательства нам потребуются следующие факты.

Предложение 2. $[9, 6.19]$ *Для любой $u\in W_1^1(-1,1)$ и произвольного множества $A\subset\mathbb{R}$ нулевой меры выполнено $u'(x)=0$ для почти всех $x\in u^{-1}(A)$.*

Лемма 8. *Пусть $u\in W_1^1(-1,1)$ и вес a является допустимым для u. Пусть замкнутое множество $W\subset\mathbb{R}$ таково, что множество $v\in W$, для которых $a(\cdot,v)\not\equiv 0$, имеет меру ноль. Тогда найдется возрастающая последовательность допустимых для u весов b_k такая, что*

1) $b_k(\cdot,v)\rightrightarrows a(\cdot,v)$ для почти всех v;

2) $b_k(\cdot,v)\equiv 0$ для любого v в некоторой (зависящей от k) окрестности W;

3) $I(b_k,u)\to I(a,u)$.

Доказательство. Возьмем $\rho(d):=\min(1,\max(0,d))$,

$$b_k(x,v) := a(x,v)\cdot\rho(k\operatorname{dist}(v,W)-1)\leqslant a(x,v).$$

Этот вес равен нулю в $\left(\frac{1}{k}\right)$-окрестности W. Кроме того, $b_k\equiv a$ вне $\left(\frac{2}{k}\right)$-окрестности W и $b_k(x,v)$ возрастают при увеличении k. Тем самым, $b_k(\cdot,v)\rightrightarrows a(\cdot,v)$ для почти всех v. По теореме о монотонной сходимости интеграла $I(u^{-1}(\mathbb{R}\setminus W),b_k,u)\nearrow I(u^{-1}(\mathbb{R}\setminus W),a,u)$.

Разобьем множество W на два: $W_1 := \{v \in W : a(\cdot, v) \equiv 0\}$ и $W_2 = W \setminus W_1$.

$$I(u^{-1}(W_1), b_k, u) = I(u^{-1}(W_1), a, u).$$

$$I(u^{-1}(W_2), b_k, u) = \int\limits_{x \in u^{-1}(W_2)} F(u(x), b_k(x, u(x))u'(x))dx.$$

При этом, по предложению 2, почти всюду на $u^{-1}(W_2)$ выполнено $u'(x) = 0$. То есть

$$I(u^{-1}(W_2), b_k, u) = \int\limits_{x \in u^{-1}(W_2)} F(u(x), 0)dx = 0.$$

Аналогично, $I(u^{-1}(W_2), a, u) = 0$, откуда $I(b_k, u) \to I(a, u)$. □

Перейдем к доказательству теоремы.

Шаг 1. Пусть $u \in W_1^1(-1, 1)$, и вес a удовлетворяет условиям $(H1)-(H7)$. Тогда выполняется неравенство (2).

Разобьем отрезок $[-1, 1]$ на отрезки Δ_k, состоящие из двух частей. В левой части каждого отрезка вес a будет возрастать по x в окрестности графика $u(x)$. В правой же будет убывать. На каждом таком отрезке можно повторить схему из предыдущего параграфа, приближая функцию u липшицевыми функциями u_n. Это дает $I(\Delta_k, a, u_n) \to I(\Delta_k, a, u)$.

Однако при такой аппроксимации функции u_n имеют разрывы на границах отрезков Δ_k (обозначим их $\hat{x}_k$).

Заметим теперь, что согласно условию $(H7)$ можно выбрать точки $\hat{x}_k$ так, что $a \equiv 0$ в (x, v)-окрестности точек $(\hat{x}_k, u(\hat{x}_k))$.

Изменим теперь функции u_n в окрестности точек $\hat{x}_k$ на линейные, сделав u_n непрерывными на $[-1, 1]$. В силу вышесказанного, интегралов $I(\Delta_k, a, u_n)$ это не изменит, и мы получаем $I(a, u_n) \to I(a, u)$.

По лемме 6 получаем (2).

Шаг 2. Пусть вес a удовлетворяет условиям $(H1) - (H6)$. Тогда выполняется неравенство (2).

Применим лемму 8. В качестве множества W возьмем множество всех v, при которых происходит переход графика $u(x)$ из прямоугольника, в котором вес убывает по x, в прямоугольник, в котором вес возрастает. Очевидно, получившиеся функции b_k удовлетворяют $(H1)-(H7)$. Поэтому $I(b_k, u^*) \leqslant I(b_k, u)$. Переходя к пределу, получаем (2).

Шаг 3. Пусть вес a удовлетворяет условиям $(H1) - (H5)$. Тогда выполняется неравенство (2).

Прямоугольник $[-1, 1] \times [\min u(x), \max u(x)]$ естественным образом делится абсциссами излома веса a и участками постоянства a по x на прямоугольники, в которых вес a имеет постоянную монотонность по x. Однако количество таких прямоугольников может оказаться бесконечным. Кроме того, если функция пересекает горизонтальную границу прямоугольника, монотонность в v-окрестности точки пересечения может меняться.

Возьмем множество v, для которых вес имеет участки постоянства по x, в качестве W. В соответствии с $(H5)$ множество $v \in W$, для которых $a(\cdot, v) \not\equiv 0$, имеет нулевую меру.

Применив лемму 8, построим последовательность весов b_k. У каждого из них количество участков монотонности конечно, поскольку между соседними по v участками строгой монотонности присутствует полоса нулевых значений веса шириной по крайней мере $\frac{2}{k}$.

Отметим теперь на каждом участке монотонности точку на графике функции u. Множество этих точек не может иметь точек скопления, поскольку между точками, в которых разная монотонность, расстояние по v по крайней мере $\frac{2}{k}$.

Тем самым, b_k удовлетворяют $(H1)-(H6)$. Поэтому $I(b_k, u^*) \leqslant I(b_k, u)$. Переходя к пределу, получаем (2).

Шаг 4. Пусть вес a удовлетворяет условиям $(H1) - (H3)$. Тогда выполняется неравенство (2).

Предположим, функция a удовлетворяет $(H1) - (H3)$, в том числе $I(a, u) < \infty$.

Зафиксируем произвольное четное k. По точкам $a(-1 + \frac{2i}{k}, v)$ для каждого v построим кусочно линейную по x интерполяцию. Получившаяся функция $a_k(x, v)$ непрерывна, четна и, по лемме 4, удовлетворяет неравенству (5). Кроме того, $a_k \to a$ при $k \to \infty$, причем сходимость равномерная на компактах. Однако неравенство $a_k(x, u(x)) \leqslant a(x, u(x))$ не обязано выполняться, и потому веса a_k могут не быть допустимыми для u.

Возьмем $c_k := (1 - D_k(a_k, U(a_k)))a_k$, где D_k определены в (8). Числа $D_k(a_k, U(a_k))$ положительны и стремятся к нулю, поэтому $c_k \to a$ при $k \to \infty$. Покажем, что $c_k(x, u(x)) \leqslant a(x, u(x))$. Возьмем некоторое $x \in [-1 + \frac{2i}{k}, -1 + \frac{2(i+1)}{k}] =: [x_i, x_{i+1}]$. Тогда $c_k(x, u(x)) \leqslant \max(c_k(x_i, u(x)), c_k(x_{i+1}, u(x)))$, поскольку c_k кусочно линейны по x. Далее,

$$\begin{aligned} c_k(x_i, u(x)) &= (1 - D_k(a_k, U(a_k))) \cdot a(x_i, u(x)) \\ &\leqslant a(x_i, u(x)) - \frac{a(x_i, u(x)) - a(x, u(x))}{a(x_i, u(x))} \cdot a(x_i, u(x)) = a(x, u(x)). \end{aligned}$$

Аналогично $c_k(x_{i+1}, u(x)) \leqslant a(x, u(x))$. Тем самым, $c_k(x, u(x)) \leqslant a(x, u(x))$ для любого x, и c_k являются допустимыми для u.

Функции c_k удовлетворяют $(H1) - (H4)$.

При заданном $k \in \mathbb{N}$, будем приближать функцию $c_k =: c$ весами, удовлетворяющими $(H1)-(H5)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\Lambda(x) = 1 - |x|$, удовлетворяющую условию (5).

Возьмем

$$t(v) := D_k(c, U(c)) \cdot \max\{\tau \geqslant 0 : \forall x \in u^{-1}(v) \quad \tau\Lambda(x) \leqslant c(x, u(x))\}.$$

Функция t зависит от k, но мы будем опускать это в записи.

Ясно, что максимальное τ равно нулю только если $c(\cdot, v) \equiv 0$, иначе нарушается условие $(H3)$. Функция t может не быть непрерывной. Однако, несложно видеть, что она полунепрерывна снизу. Возьмем теперь

$$\tilde{t}(v) := \inf_{w \in u([-1,1])} \{t(w) + |v - w|\}.$$

Очевидно, что $\tilde{t} \leqslant t$, и множества нулей функций t и $\tilde{t}$ совпадают.

Покажем, что $\tilde{t}$ непрерывна (и даже липшицева). Зафиксируем некоторое v_1. Тогда найдутся сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и $w_1 \in u([-1,1])$, удовлетворяющие $\tilde{t}(v_1) = t(w_1) + |v_1 - w_1| - \varepsilon$. Для любого v_2 имеем $\tilde{t}(v_2) \leqslant t(w_1) + |v_2 - w_1|$. И, тем самым, $\tilde{t}(v_2) - \tilde{t}(v_1) \leqslant |v_1 - v_2| + \varepsilon$. В силу произвольности v_1, v_2 и ε, получаем, что $\tilde{t}$ непрерывна.

При $\alpha \in [0,1]$ функция $d_\alpha(x,v) := c(x,v) + \alpha\Lambda(x)\tilde{t}(v)$ четна по x, удовлетворяет неравенству (5) согласно лемме 3 и не превосходит $a(x,v)$ по построению функции $\tilde{t}$. Таким образом, d_α — допустимый вес. Далее, очевидно, что d_α удовлетворяет условиям $(H1) - (H4)$.

Покажем, что найдется последовательность $\alpha_j \searrow 0$, что d_{α_j} не имеет горизонтальных участков, кроме сплошных нулей и множества меры 0. Обозначим множество α, "плохих" на участке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$A_i := \Big\{\alpha \in [0,1] : \\ meas\{v \in [\min u, \max u] : \frac{c(x_{i+1}, v) - c(x_i, v))}{\frac{2}{k}} + \alpha\chi_i\tilde{t}(v) = 0\} > 0\Big\},$$

где $\chi_i = 1$, если $[x_i, x_{i+1}] \subset [0,1]$, и $\chi_i = -1$, если $[x_i, x_{i+1}] \subset [-1,0]$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} h(v) =& \frac{c(x_{i+1}, v) - c(x_i, v)}{\tilde{t}(v)} \qquad \text{при } \tilde{t}(v) \neq 0 \\ h(v) =& 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{при } \tilde{t}(v) = 0. \end{aligned}$$

Тогда $\mathrm{card}(A_i) = \mathrm{card}(\{\alpha \in [0,1] : meas\{v \in [\min u, \max u] : h(v) \pm \frac{2}{k}\ \alpha = 0\} > 0\})$. Значит, $\mathrm{card}(A_i) \leqslant \aleph_0$, а также $\mathrm{card}(\cup_i A_i) \leqslant \aleph_0$. Тем самым, найдется последовательность весов $d_{\alpha_j} \searrow c$, удовлетворяющих $(H1) - (H5)$. Поэтому $I(d_{\alpha_j}, u^*) \leqslant I(d_{\alpha_j}, u)$. Переходя к пределу, получим $I(c, u^*) \leqslant I(c, u)$.

Далее, при $x \in [-1,1]$ и $k \to \infty$ имеем

$$F(u(x), c_k(x, u(x))|u'(x)|) \to F(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|).$$

Кроме того, $F(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|)$ является суммируемой мажорантой. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости, получаем $I(c_k, u) \to I(a, u)$. Поскольку $I(c_k, u^*) \leqslant I(c_k, u)$, лемма 6 дает (2).

Шаг 5. Пусть вес a удовлетворяет лишь условию $(H1)$. Тогда выполняется неравенство (2).

Будем строить приближение для a весами, удовлетворяющими $(H1)-(H2)$. Воспользуемся леммой 8. В качестве множества W возьмем $\{v \in \mathbb{R} : a(\cdot, v) \equiv 0\}$. Введем обозначение

$$Z_a(v) := \{x \in [-1,1] : a(x,v) = 0\}.$$

Заметим, что множества $Z_{b_k}(v)$ совпадают либо с $Z_a(v)$, либо с $[-1,1]$.

Покажем, что b_k удовлетворяет $(H2)$. Действительно, в противном случае найдется последовательность v_l, для которой $l < \operatorname{card}(Z_{b_k})(v_l) < \infty$. После перехода к подпоследовательности имеем $v_l \to v_0$. Покажем, что $Z_a(v_0) = [-1,1]$. Из леммы 2 следует, что множества $Z_{b_k}(v_l) = Z_a(v_l)$ периодические с периодом не более $\frac{2}{l-1}$. Возьмем некоторый $x \in [-1,1]$. Для каждого l найдется x_l такой, что $|x - x_l| \leqslant \frac{1}{l-1}$ и $a(x_l, v_l) = 0$. Но $a(x_l, v_l) \to a(x, v_0)$. Тем самым, $a(x, v_0) = 0$ и $Z_a(v_0) = [-1,1]$. Но это означает, что для каждого v такого, что $|v - v_0| \leqslant \frac{1}{k}$, выполнено $b_k(\cdot, v) \equiv 0$, что противоречит $\operatorname{card}(Z_{b_k})(v_l) < \infty$.

Зафиксируем теперь $k \in \mathbb{N}$, обозначим $b_k =: b$ и приблизим функцию b весами, удовлетворяющими $(H1)-(H3)$. Из $(H2)$ и леммы 2, часть 2, следует, что найдется множество $T \subset [-1,1]$, состоящее из конечного числа элементов, такое, что если $x \notin T$ и $a(x,v) = 0$ для некоторого v, то $b(\cdot, v) \equiv 0$. Вновь воспользуемся леммой 8 с множеством $W = u(T) \cup u^*(T)$.

Полученные при помощи леммы веса c_j удовлетворяют $(H1)-(H2)$, поскольку отличаются от b лишь домножением на непрерывный множитель, меньший единицы и зависящий только от v. Очевидно, $\min\limits_{dist(x,u^{-1}(v)) \leqslant \frac{2}{j}} c_j(x,v)$ не равен нулю при $v \in U(c_j)$, начиная с некоторого j. Более того, при $v \in U(c_j)$

$$\frac{\max\limits_{|x_i - x_{i+1}| \leqslant \frac{2}{j}} |c_j(x_i, v) - c_j(x_{i+1}, v)|}{\min\limits_{\operatorname{dist}(x,u^{-1}(v)) \leqslant \frac{2}{j}} c_j(x,v)} = \frac{\max\limits_{|x_i - x_{i+1}| \leqslant \frac{2}{j}} |b(x_i, v) - b(x_{i+1}, v)|}{\min\limits_{\operatorname{dist}(x,u^{-1}(v)) \leqslant \frac{2}{j}} b(x,v)}.$$

При этом, знаменатель второй дроби при $v \in U(c_j)$ отделен от нуля. Тем самым, $D_j(c_j, U(c_j))$ ограничена.

Поскольку D_j не меняется при домножении первого аргумента на коэффициент, не зависящий от x, и $U(c_j) \nearrow U(b)$, имеем при $j \to \infty$

$$D_j(c_j, U(c_j)) = D_j(b, U(c_j)) \leqslant D_j(b, U(b)) \to 0.$$

Таким образом, веса c_j удовлетворяют $(H1)-(H3)$. Тем самым, $I(c_j, u^*) \leqslant I(c_j, u)$. Переходя к пределу, получим $I(b_k, u^*) \leqslant I(b_k, u)$, а затем и неравенство (2).

Тем самым, теорема 3 доказана. $\square$

Рассмотрим теперь случай, когда функция u удовлетворяет дополнительному условию $u(-1) = 0$.

Теорема 4. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1(-1,1)$ неотрицательна, $u(-1) = 0$, весовая функция $a : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и удовлетворяет неравенству* (5). *Тогда справедливо неравенство* (2).

Доказательство. Мы следуем схеме доказательства теоремы 3, но вместо $(H1)$ и $(H7)$ накладываем следующие условия на вес:

$(H1')$ $a(x,v)$ удовлетворяет неравенству (5), а также $I(a,u)<\infty$.

$(H7')$ Выполнено условие $(H7)$, и $a(\cdot,v)\equiv 0$ в некоторой v-окрестности нуля.

Шаг 1. Пусть $u\in W_1^1(-1,1)$, выполнено $u(-1)=0$, и вес a удовлетворяет условиям $(H1'),(H2)-(H6),(H7')$. Тогда выполняется неравенство (2).

Для доказательства будем приближать функцию u так же, как и в первом шаге доказательства теоремы 3, с заменой u в некоторой окрестности точки $x=-1$ на линейную так, чтобы $u_n(-1)=0$.

Шаг 2. Пусть вес a удовлетворяет условиям $(H1'),(H2)-(H6)$. Тогда выполняется неравенство (2).

Для доказательства добавим в множество W из второго шага доказательства теоремы 3 точку 0 и повторим рассуждение.

Дальнейшие шаги проходят без изменений. □

8 Дополнение. Случай симметричной перестановки

8.1 Необходимые условия на вес

Лемма 9. *Если неравенство* (3) *выполняется для произвольной* $F\in\mathfrak{F}$ *и произвольной кусочно линейной* u, *то вес* a *удовлетворяет условию*

$$\forall s,t\in[-1,1],\forall v\in\mathbb{R}_+\quad a(s,v)+a(t,v)\geqslant a\Big(\frac{s-t}{2},v\Big)+a\Big(\frac{t-s}{2},v\Big). \tag{9}$$

Доказательство. Предположим, что неравенство (9) не выполнено. Тогда найдутся $-1\leqslant s<t\leqslant 1$, $\varepsilon,\delta>0$ $(2\varepsilon<t-s)$ и $\bar v\in\mathbb{R}_+$, такие, что для любого $0\leqslant z\leqslant\varepsilon$ и любого $\bar v\leqslant v\leqslant\bar v+\varepsilon$ выполнено

$$a(s+z,v+z)+a(t-z,v+z)+2\delta<a\Big(\frac{s-t}{2}+z,v+z\Big)+a\Big(\frac{t-s}{2}-z,v+z\Big). \tag{10}$$

Рассмотрим функцию u, введенную в (6). Тогда

$$\begin{cases}\bar u(x)=\bar v, & x\in[-1,\frac{s-t}{2}]\cup[\frac{t-s}{2},1]\\ \bar u(x)=\bar v+x-\frac{s-t}{2}, & x\in[\frac{s-t}{2},\frac{s-t}{2}+\varepsilon]\\ \bar u(x)=\bar v+\varepsilon, & x\in[\frac{s-t}{2}+\varepsilon,\frac{t-s}{2}-\varepsilon]\\ \bar u(x)=\bar v+\frac{t-s}{2}-x, & x\in[\frac{t-s}{2}-\varepsilon,\frac{t-s}{2}].\end{cases}$$

Отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant I(a,u) &- I(a,\overline{u}) \\
&= \int_0^\varepsilon F(u(s+z), \frac{a(s+z, u(s+z))}{\varepsilon})dz + \int_0^\varepsilon F(u(t-z), \frac{a(t-z, u(t-z))}{\varepsilon})dz \\
&\qquad - \int_0^\varepsilon F(\bar{u}(\frac{s-t}{2}+z), \frac{a(\frac{s-t}{2}+z, \bar{u}(\frac{s-t}{2}+z))}{\varepsilon})dz \\
&\qquad\qquad - \int_0^\varepsilon F(\bar{u}(\frac{t-s}{2}-z), \frac{a(\frac{t-s}{2}-z, \bar{u}(\frac{t-s}{2}-z))}{\varepsilon})dz =: J.
\end{aligned}
$$

Возьмем $F(v,p) := f(p) := p + \gamma p^2$, где $\gamma > 0$. Тогда

$$
\begin{aligned}
J = \int_0^\varepsilon \big(f(\frac{a(s+z, \bar{v}+z)}{\varepsilon}) &+ f(\frac{a(t-z, \bar{v}+z)}{\varepsilon}) \\
&- f(\frac{a(\frac{s-t}{2}+z, \bar{v}+z)}{\varepsilon}) - f(\frac{a(\frac{t-s}{2}-z, \bar{v}+z)}{\varepsilon})\big)dz.
\end{aligned}
$$

Обозначим $A := \max a(x,v)$, где максимум берется по всем $x \in [-1,1]$ и $v \in [\bar{v}, \bar{v}+\varepsilon]$. Если взять $\gamma := \frac{\delta/\varepsilon}{(A/\varepsilon)^2} > 0$, то для $p \leqslant \frac{A}{\varepsilon}$ имеем $p \leqslant f(p) \leqslant p + \frac{\delta}{\varepsilon}$, и

$$
J \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \big(a(s+z, \bar{v}+z) + a(t-z, \bar{v}+z) + 2\delta - a(\frac{s-t}{2}+z, \bar{v}+z) - a(\frac{t-s}{2}-z, \bar{v}+z)\big)dz < 0
$$

(последнее неравенство следует из (10)).

Тем самым, мы пришли к противоречию, что завершает доказательство. $\square$

Лемма 10. *Если для функции $a \in C([-1,1] \times \mathbb{R}_+)$ выполнено соотношение* (9), *то она четна и выпукла по первому аргументу.*

Доказательство. Предположим для начала, что $a(\cdot, v) \in C^1([-1,1])$ при каждом v. Зафиксируем произвольные $s \in [-1,1]$ и $v \in \mathbb{R}_+$ и рассмотрим функцию

$$
b(x) := a(s,v) + a(x,v) - a(\frac{s-x}{2}, v) - a(\frac{x-s}{2}, v) \geqslant 0.
$$

$x = -s$ является точкой минимума функции b, поскольку $b(-s) = 0$. Значит,

$$
b'(-s) = a'_x(-s,v) + \frac{1}{2}a'_x(s,v) - \frac{1}{2}a'_x(-s,v) = 0,
$$

то есть $a'_x(s,v) = -a'_x(-s,v)$. Тем самым, функция $a(\cdot, v)$ четна.

Рассмотрим теперь случай произвольной непрерывной a.

Продолжим $a(x,v) := a(-1,v)$ при $x < -1$ и $a(x,v) := a(1,v)$ при $x > 1$. Рассмотрим усреднение функции:

$$
a_\rho(x,v) = \int_{\mathbb{R}} \omega_\rho(z) a(x-z, v)dz = \int_{\mathbb{R}} \omega_\rho(z) a(x+z, v)dz,
$$

где $\omega_\rho(z)$ — усредняющее ядро с радиусом ρ. Тогда

$$a_\rho(s,v)+a_\rho(t,v)-a_\rho(\frac{s-t}{2},v)-a_\rho(\frac{t-s}{2},v)=$$
$$\int_{\mathbb{R}}\omega_\rho(z)\big(a(s-z,v)+a(t+z,v)-a(\frac{s-t}{2}-z,v)-a(\frac{t-s}{2}+z,v)\big)dz\geqslant 0.$$

Значит $a_\rho(\cdot,v)$ — четная. Переходя к пределу при $\rho\to 0$, получаем, что $a(\cdot,v)$ — четная.

Наконец, для любых s, t и v имеем

$$a(s,v)+a(t,v)=a(s,v)+a(-t,v)\geqslant 2a\big(\frac{s+t}{2},v\big).$$

□

8.2 Доказательство неравенства (3)

Теорема 5. *Пусть $F\in\mathfrak{F}$, функция $u\in W_1^1(-1,1)$ неотрицательна, и непрерывная весовая функция $a:[-1,1]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ четна и выпукла по первому аргументу. Тогда справедливо неравенство* (3)*.*

Доказательство. Как указывалось во введении, для липшицевых функций u утверждение теоремы доказано в [2]. Таким образом, необходимо лишь перейти к W_1^1-функциям.

Структура выпуклого по x веса гораздо проще структуры веса, который мы рассматривали для случая монотонной перестановки. Выпуклый вес убывает при $x<0$ и возрастает при $x>0$ независимо от v. Тем самым, мы сразу входим в условия $(H6)$ из теоремы 3. Чтобы войти в условия $(H7)$, применим лемму 8 с множеством $W=\{u(0)\}$. Это дает нам возможность сразу воспользоваться шагом 1 доказательства, получив неравенство (3) в общем виде. Заметим, что шаг 1 использует лишь условия $(H1)$, $(H6)$, $(H7)$, так что нет нужды проверять остальные. □

Мы весьма признательны профессору В. Г. Осмоловскому за ценные замечания, позволившие улучшить текст статьи.

Работа второго автора поддержана грантом РФФИ 12-01-00439 и грантом СПбГУ 6.38.670.2013.

Список литературы

[1] G. Alberti, F. Serra Cassano: Non-occurrence of gap for one-dimentional autonomous functionals, Proceedings of “Calc. Var., Homogen. and Cont. Mech.”, G. Bouchitté, G. Buttazzo, P. Suquet, ed.: World Sci., Singapore, p. 1–17, 1994

[2] F. Brock: Weighted Dirichlet-type inequalities for Steiner symmetrization, Calc. Var. and PDEs **8**, p. 15–25, 1999

[3] B. Kawohl: Rearrangements and convexity of level sets in PDE, Lecture notes in mathematics **1150**. Berlin; Springer Verlag, 1985. 134 p.

[4] R. Landes: Some remarks on rearrangements and functionals with non-constant density, Math. Nachr. **280**, №5–6, p. 560–570, 2007

[5] С. Банкевич, А. Назаров: Об обобщении неравенства Пойа-Сеге для одномерных функционалов, Доклады Академии Наук **438**, №1, с. 11–13, 2011

[6] Дж. Буттаццо, М. Джаквинта, С. Гильдебрандт: Одномерные вариационные задачи. Введение, Научная книга, Новосибирск, 2002. 246 с.

[7] В. В. Жиков: О весовых соболевских пространствах, Матем. сб., **189**, №8, с. 27–58, 1998

[8] В. В. Жиков: К проблеме предельного перехода в дивергентных неравномерно эллиптических уравнениях, Функц. анализ и его прил., **35**, №1, с. 23–39, 2001

[9] Э. Либ, М. Лосс: Анализ, Научная книга, Новосибирск, 1998. 276 с.

[10] У. Рудин: Функциональный анализ, Мир, М., 1975. 444 с.

[11] Г. Федерер: Геометрическая теория меры, Наука, М., 1987. 760 с.

[12] Л. К. Эванс, Р. Ф. Гариепи: Теория меры и тонкие свойства функций, Научная книга, Новосибирск, 2002. 216 с.