Об асимптотике спектра задачи Неймана для уравнения Штурма-Лиувилля с самоподобным весом обобщенного канторовского типа

Растегаев Н. В.
СПбГУ, Лаборатория им. П.Л.Чебышева
Россия, Санкт-Петербург
rastmusician@gmail.com

11 декабря 2013 г.

§1 Введение

В настоящей работе обобщаются некоторые результаты работ [1] и [2], касающиеся асимптотик спектра задачи

$$-y'' - \lambda \rho y = 0, \tag{1}$$
$$y'(0) = y'(1) = 0, \tag{2}$$

где весовая мера ρ представляет собой обобщенную производную самоподобной функции обобщенного канторовского типа (в частности, ρ сингулярна относительно меры Лебега).

Замечание 1. Хорошо известно, что изменение граничных условий задачи влечет возмущение квадратичной формы ранга два. Из общей вариационной теории (см. [3, §10.3]) потому следует, что считающие функции собственных значений граничных задач, отвечающих одному и тому же уравнению, но разным граничным условиям, не могут различаться более, чем на 2.

Вопрос об асимптотическом поведении собственных значений этой задачи восходит к работам М. Г. Крейна (см., например, [4]).

В работе [5] установлено, что если мера ρ содержит абсолютно непрерывную компоненту, то ее сингулярная составляющая не влияет на главный член асимптотики спектра.

В случае чисто сингулярной меры ρ в работе [6] показано, что считающая функция $N : (0, +\infty) \to \mathbb{N}$ собственных чисел краевой задачи для оператора $(-1)^l y^{(2l)}$ допускает оценку $o(\lambda^{\frac{1}{2l}})$ вместо обычной асимптотики $N(\lambda) \sim C\lambda^{\frac{1}{2l}}$ в случае меры,

Представлено А. И. Назаровым.

содержащей регулярную составляющую. Для некоторых специальных классов мер в [6] были получены лучшие оценки снизу для собственных чисел.

Точный степенной порядок D роста считающей функции $N(\lambda)$ в случае самоподобной меры ρ был установлен в [7] (см. также более ранние работы [8] и [9], где получены частные результаты, касающиеся классической канторовой лестницы).

В работе [1] показано, что считающая функция собственных значений задачи (1), (2) имеет при $\lambda \to +\infty$ асимптотику

$$N(\lambda) = \lambda^D \cdot \big(s(\ln\lambda) + o(1)\big), \tag{3}$$

где s — некоторая зависящая от выбора веса ρ непрерывная периодическая функция, показатель $D \in (0, \frac{1}{2})$. В случае неарифметичности типа самоподобия (см. Определение 2 ниже) канторовой лестницы, производной которой является ρ, функция s вырождается в константу. В случае арифметического самоподобия она имеет период ν, зависящий от параметров лестницы.

В работе [10] этот результат обобщается на случай дифференциального оператора высшего четного порядка, и, кроме того, сформулирована гипотеза о том, что функция s является непостоянной для произвольного неравномерного веса с арифметически самоподобной первообразной.

В работе [11] при помощи компьютерных вычислений доказано, что функция s действительно не может являться постоянной в том простейшем случае, когда обобщённая первообразная веса ρ представляет собой классическую канторову лестницу.

В работе [2] гипотеза была подтверждена для “ровных” лестниц. Для таких лестниц была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Коэффициент s из асимптотики* (3) *допускает представление*

$$\forall t \in [0,\nu] \quad s(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t),$$

где σ — некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.

Отсюда утверждение о непостоянстве функции $s(t)$ следует немедленно. Этот результат позднее обобщен в работе [12] на случай уравнения четвертого порядка.

Целью настоящей работы является обобщение этого результата на более широкий класс лестниц.

Работа имеет следующую структуру. §2 носит обзорный характер, в нем приводятся необходимые определения самоподобных функций обобщенного канторовского типа, выводятся их свойства и определяются исследуемые классы функций. В §3 устанавливается факт спектральной периодичности для задачи Неймана, аналогичный [2], а также более слабый вариант спектральной “квазипериодичности” для некоторых других краевых задач. Наконец, в §4 доказывается Теорема 1 для выделенного класса лестниц.

§2 Самоподобные функции обобщенного канторовского типа

Пусть $m \geqslant 2$, и $\{I_k = [a_k, b_k]\}_{k=1}^m$ — подотрезки $[0,1]$, не пересекающиеся по внутренности. Обозначим через $S_k(t) = a_k + (b_k - a_k)\,t$ аффинные сжатия $[0,1]$ на I_k, не меняющие ориентации. Введем также набор положительных чисел $\{\rho_k\}_{k=1}^m$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^m \rho_k = 1$.

Определим оператор $\mathcal{S}$, действующий на пространстве $L_\infty(0,1)$ следующим образом:

$$\mathcal{S}(f) = \sum_{k=1}^m \left(\chi_{I_k}(f \circ S_k^{-1}) + \chi_{\{x>b_k\}}\right)\rho_k.$$

Предложение 1. (см., напр., [13, Лемма 2.1]) $\mathcal{S}$ *— сжимающее отображение на* $L_\infty(0,1)$.

Отсюда по теореме Банаха о неподвижной точке существует (единственная) функция $C \in L_\infty(0,1)$ такая, что $\mathcal{S}(C) = C$.

Определение 1. Такую функцию $C(t)$ будем называть *обобщенной канторовой лестницей* с m ступеньками.

Функцию $C(t)$ можно искать как равномерный предел последовательности $\mathcal{S}^k(f)$ для $f(t) \equiv t$, что позволяет считать ее непрерывной и монотонной, причем $C(0) = 0$, $C(1) = 1$. Производная функции $C(t)$ в смысле обобщенных функций — сингулярная мера ρ без атомов, самоподобная по Хатчинсону (см. [14]), т.е. удовлетворяющая соотношению

$$\rho(E) = \sum_{k=1}^m \rho_k \cdot \rho(S_k^{-1}(E \cap I_k)).$$

Более общие способы построения самоподобных функций описаны в [13].

Определение 2. Самоподобие будем называть *арифметическим*, если логарифмы величин $\rho_k(b_k - a_k)$ соизмеримы.

Определение 3. Будем называть обобщенную канторову лестницу *ровной*, если

$$\forall k = 2, \ldots, m \quad \rho_k = \rho_1 = \frac{1}{m}, \quad b_k - a_k = b_1 - a_1, \quad a_k - b_{k-1} = a_2 - b_1.$$

Именно такой класс лестниц рассмотрен в работе [2].

В настоящей работе результаты [2] обобщаются на следующий класс функций. Мы полагаем, что $a_1 = 0$, $b_m = 1$. Мы требуем, чтобы промежуточные отрезки были непустыми ($a_k - b_{k-1} \neq 0$), но не накладываем никаких других ограничений на их величины. Кроме того, мы требуем, чтобы были равны между собой величины $\rho_k(b_k - a_k)$, то есть

$$\forall k = 1, \ldots, m \quad \rho_k(b_k - a_k) = \tau \tag{4}$$

для некоторой постоянной τ. В рамках этого условия величины ρ_k и $b_k - a_k$ могут быть произвольными.

Замечание 2. В работе [1] была получена формула для периода функции $s(t)$. Для нашего класса лестниц его величина определяется соотношением

$$\nu = -\ln \tau.$$

§3 Спектральная периодичность

Будем рассматривать формальную граничную задачу

$$-y'' - \lambda\rho y = 0, \tag{5}$$

$$y'(0) - \gamma_0 y(0) = y'(1) + \gamma_1 y(1) = 0. \tag{6}$$

Ее обобщенным решением называется функция $y \in W_2^1[0,1]$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int\limits_0^1 y'\eta'\,dx + \gamma_0 y(0)\eta(0) + \gamma_1 y(1)\eta(1) = \lambda \int_0^1 y\eta\,\rho(dx)$$

для любой функции $\eta \in W_2^1[0,1]$. Подставляя в интегральное тождество функции $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$, устанавливаем, что производная y' является первообразной сингулярной меры без атомов $\lambda\rho y$, откуда следует, что $y \in C^1[0,1]$. Кроме того, нам потребуются следующие осцилляционные свойства собственных функций.

Предложение 2. ([15, Утверждение 11]) *Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи* (5), (6)*. Тогда независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ собственное значение λ_n является простым, причём любая отвечающая ему собственная функция не обращается в нуль на границе отрезка* $[0,1]$ *и имеет внутри этого отрезка в точности n различных нулей.*

Докажем теперь основные утверждения этого параграфа.

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений отвечающих задаче* (1), (2)*. Тогда независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство*

$$\tau\lambda_{mn} = \lambda_n. \tag{7}$$

Доказательство. Схема доказательства повторяет [2, п.3.1.1]. Зафиксируем отвечающую собственному значению λ_n собственную функцию y_n. Сопоставим ей функцию $z \in C[0,1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$z = c_k \cdot (y_n \circ S_k^{-1}) \text{ на отрезках } I_k,$$

кроме того, продолжим ее константами на промежуточные отрезки. Не равные нулю величины c_k подбираются таким образом, чтобы функция z была непрерывной. Нетрудно видеть, что получившаяся функция непрерывно дифференцируема и удовлетворяет равенству

$$z'(0) = z'(1) = 0.$$

Легко проверить, что функция z представляет собой собственную функцию краевой задачи (1), (2), отвечающую собственному значению $\tau^{-1}\lambda_n$. Кроме того, она имеет на отрезке $[0,1]$ в точности mn корней, что и означает (Предложение 2) выполнение равенства (7). $\square$

В [2, п.3.1.2] было получено также соотношение, связывающее собственные числа с номерами n и $m(n+1)-1$ в определенных задачах со смешанными граничными условиями вида (5), (6). В точности аналогичное утверждение в более общем случае не может быть доказано, поэтому мы выведем одностороннюю оценку, которую назовем *спектральной квазипериодичностью*. Зафиксируем функцию y_n, отвечающую собственному значению λ_n задачи с граничным условием

$$y'(0)-\gamma^{(1)}y(0)=y'(1)+\gamma^{(1)}y(1)=0.$$

Построим функцию z следующим образом. Определим

$$z=c_k\cdot(y_n\circ S_k^{-1}) \text{ на отрезках } I_k,$$

кроме того, продолжим ее гладко линейными функциями на промежуточные отрезки до пересечения с осью абсцисс. Если положить $\gamma^{(1)}=\max\limits_k\left(\frac{2}{|a_{k+1}-b_k|}\right)$, то пересечения окажутся близко к краям I_k, и в серединах промежуточных отрезков функция останется не определена. Мы определим ее нулем на всех оставшихся интервалах. Знаки ненулевых параметров c_k определим таким образом, чтобы на каждом промежуточном отрезке функция z имела смену знака. Получившаяся функция почти всюду удовлетворяет уравнению (1) для $\lambda=\tau^{-1}\lambda_n$, но, к сожалению, не является гладкой. Мы проведем с ней некоторое непрерывное преобразование, не увеличивающее значения λ и не меняющее числа перемен знака. В результате мы получим гладкую функцию, являющуюся собственной для некоторой краевой задачи, и сможем написать оценку собственных значений этой краевой задачи через λ_n.

Наше преобразование будет состоять из нескольких шагов. На шаге j функция z склеена из собственных функций краевых задач на подотрезках I_k с некоторыми граничными условиями

$$z'(a_k)-\alpha_j^{(k)}z(a_k)=z'(b_k)+\beta_j^{(k)}z(b_k)=0$$

и продолжена линейно на промежуточные отрезки. На некоторых промежуточных отрезках z уже гладкая, на остальных кусочно линейна. Мы зафиксируем $\alpha_j^{(1)}$ и $\beta_j^{(m)}$ и будем непрерывно изменять остальные значения $\alpha_j^{(k)}$ и $\beta_j^{(k)}$ таким образом, чтобы собственные числа, которым отвечают функции на отрезках I_k оставались одинаковыми, z оставалась гладкой на промежутках, где гладкость уже была достигнута, и $\beta_j^{(k)}$, $\alpha_j^{(k+1)}$ уменьшались на концах промежутков, где гладкости еще нет. Эта процедура уменьшает значение λ в силу вариационного принципа и не меняет числа перемен знака согласно Предложению 2.

В некоторый момент хотя бы на одном из промежуточных отрезков пересечения продолжений с осью абсцисс совпадут. Допустим, это произошло между отрезками I_l и I_{l+1}. В этот момент мы умножаем c_{l+1} и все последующие на общий коэффициент таким образом, чтобы z была гладкой на отрезке $[a_l,b_{l+1}]$.

После $m-1$ шага z станет полностью гладкой. После этого можно уменьшить один из параметров краевых условий на концах, чтобы выполнялось

$$\alpha_m^{(1)}=\beta_m^{(m)}=\gamma^{(2)}:=\gamma^{(1)}\cdot\min\{|I_1|,|I_m|\}.$$

Заметим, что получившаяся функция z имеет в точности $m(n+1)-1$ корней, а значит, является собственной функцией, отвечающей собственному числу $\mu_{m(n+1)-1}$ краевой задачи

$$z'(0)-\gamma^{(2)}z(0)=z'(1)+\gamma^{(2)}z(1)=0.$$

Кроме того, по построению получившееся $\mu_{m(n+1)-1}$ не превышает исходного значения $\tau^{-1}\lambda_n$. Таким оразом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Положим* $\gamma^{(1)}=\max\limits_k\left(\frac{2}{|a_{k+1}-b_k|}\right)$, $\gamma^{(2)}=\gamma^{(1)}\cdot\min\{|I_1|,|I_m|\}$. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ *— последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений отвечающей уравнению* (5) *граничной задачи*

$$y'(0)-\gamma^{(1)}y(0)=y'(1)+\gamma^{(1)}y(1)=0,$$

а $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ *— аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи*

$$y'(0)-\gamma^{(2)}y(0)=y'(1)+\gamma^{(2)}y(1)=0.$$

Тогда независимо от выбора индекса $n\in\mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\tau\mu_{m(n+1)-1}\leqslant\lambda_n.$$

§4 Уточнение характеристик спектра

Целью настоящего параграфа является доказательство Теоремы 1. При доказательстве этого утверждения нами будут использоваться следующие факты:

Предложение 3. ([2, Утверждение 4.1.3]) *Пусть* $f\in L_2[0,1]$ *— ограниченная неубывающая функция,* $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ *— последовательность неубывающих ступенчатых функций, а* $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=0}^\infty$ *— последовательность множеств точек разрыва функций* f_n. *Пусть также при* $n\to\infty$ *выполняется асимптотическое соотношение*

$$(\#\mathfrak{A}_n+2)\cdot\|f-f_n\|_{L_2[0,1]}=o(1).$$

Тогда монотонная функция f *является чисто сингулярной.*

Предложение 4. ([2, Утверждение 5.2.1]) *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ *— последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи*

$$-y''-\lambda\rho y=0, \tag{8}$$

$$y'(0)=y'(1)=0, \tag{9}$$

а $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ *— аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи*

$$y'(0)-\gamma_0y(0)=y'(1)+\gamma_1y(1)=0,$$

где γ_0, $\gamma_1\geqslant 0$. *Тогда сходится числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^\infty|\ln\mu_n-\ln\lambda_n|.$$

Замечание 3. Более общие результаты о регуляризованных произведениях собственных значений рассматривались также в [16].

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи (1), (2), а $\{\mu_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\mu_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$, соответственно, отвечающих тому же уравнению граничных задач

$$y'(0) - \gamma^{(1)} y(0) = y'(1) + \gamma^{(1)} y(1) = 0$$

и

$$y'(0) - \gamma^{(2)} y(0) = y'(1) + \gamma^{(2)} y(1) = 0,$$

где параметры $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ введены в Теореме 3.

Положим $\sigma_k(t) := m^{-k} N(e^{k\nu+t})$, где N — считающая функция λ_n. Заметим (по соотношению (3)), что при всех $t \in [0,\nu]$ выполняется равенство $\sigma(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k(t)$. Заметим также, что σ_k и σ_{k+1} для всех $t \in [0,\nu]$ различаются не более чем на m^{-k}, а в силу равенства (7) и соотношения $\nu = -\ln\tau$ независимо от выбора индекса $k \in \mathbb{N}$ для всех $t \in [0,\nu]$, удовлетворяющих при некотором $n \in \mathbb{N}$ неравенствам

$$\lambda_{m(n+1)-1} < e^{(k+1)\nu+t} < \lambda_{m(n+1)}, \tag{10}$$

значения функций σ_k и σ_{k+1} совпадают. Оценим мощность множества всех прочих t. Если для $t \in [0,\nu]$ не выполняется (10), то для него верно следующее:

$$(k+1)\nu + t \in \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left[\ln\lambda_{mn}, \ln\lambda_{m(n+1)-1}\right] \right) \cap [(k+1)\nu, (k+2)\nu].$$

Оценим последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln\lambda_{m(n+1)-1} - \ln\lambda_{mn}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\ln\lambda_{m(n+1)-1} - \ln\mu^{(2)}_{m(n+1)-1}| + \sum_{n=1}^{\infty} |\ln\mu^{(2)}_{m(n+1)-1} - \ln\lambda_{mn}|.$$

Оценим отдельно каждое слагаемое.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln\lambda_{m(n+1)-1} - \ln\mu^{(2)}_{m(n+1)-1}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\ln\lambda_n - \ln\mu_n^{(2)}| \leqslant C.$$

Здесь первое неравенство получается расширением множества слагаемых, а второе — применением Предложения 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln\mu^{(2)}_{m(n+1)-1} - \ln\lambda_{mn}| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\mu^{(2)}_{m(n+1)-1} - \ln\lambda_{mn} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \ln\mu_n^{(1)} - \ln\lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} |\ln\mu_n^{(1)} - \ln\lambda_n| \leqslant C.$$

Здесь первое неравенство следует из Теоремы 3, второе из Предложения 4, равенства верны в силу соотношений

$$\mu^{(2)}_{m(n+1)-1} > \mu^{(2)}_{mn} > \lambda_{mn}, \quad \mu^{(1)}_{n} > \lambda_n.$$

Таким образом мы показали, что мера множества $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \left[\ln \lambda_{mn}, \ln \lambda_{m(n+1)-1}\right]$ ограничена, а это значит, что после пересечения с уходящими на бесконечность отрезками $[(k+1)\nu, (k+2)\nu]$ мы получим, что

$$\operatorname{meas}\{t \in [0,\nu] \,:\, \sigma_{k+1}(t) \neq \sigma_k(t)\} = \mathrm{o}\,(1), \quad k \to \infty.$$

Соответственно, справедливы оценки

$$\|\sigma_{k+1} - \sigma_k\|_{L_2[0,\nu]} = o(m^{-k}),$$

а тогда и вытекающая из них асимптотика

$$\|\sigma_k - \sigma\|_{L_2[0,\nu]} = o(m^{-k}).$$

Убедимся, что число точек разрыва функций σ_k допускает при $k \to \infty$ оценку $O(m^k)$. Используя соотношение (7), получим следующее неравенство:

$$m^{k+c} + 1 = N(\lambda_{m^{k+c}}) = N(\tau^{-k+c}\lambda_1) > N(e^{k\nu+t})$$

при целом значении $c > \nu^{-1}(1 - \ln \lambda_1)$. Остается заметить, что число разывов функции $N(\lambda)$ на отрезке не превосходит ее значения на правом конце.

Таким образом, функция σ вместе с последовательностью кусочно постоянных приближений σ_k удовлетворяют всем условиям Предложения 3, что и доказывает утверждение теоремы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 13-01-00172А), грантом СПбГУ N6.38.64.2012, Лабораторией им. П.Л.Чебышева СПбГУ (грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026), ОАО "Газпром нефть".

Литература

[1] M. Solomyak, E. Verbitsky. *On a spectral problem related to self-similar measures*// Bull. London Math. Soc. — 1995. — V. 27, № 3. — P. 242–248.

[2] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа*// `arXiv:1102.4199`.

[3] М. С. Бирман, М. З. Соломяк. *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве* // Изд. "Лань". — 2010.

[4] М. Г. Крейн. *Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру*// ДАН СССР. — 1951. — Т.76, № 3. — С. 345–348.

[5] М. С. Бирман, М. З. Соломяк. *Асимптотика спектра слабо полярных интегральных операторов*// Изв. АН СССР, матем. — 1970. — Т.34 № 6. — С. 1143-1158.

[6] В. В. Борзов. *О количественных характеристиках сингулярных мер*// Проблемы матем. физики. — 1970. — Т.4. — С.42-47.

[7] T. Fujita. *A fractional dimention, self-similarity and a generalized diffusion operator* // Taniguchi Symp. PMMP. Katata. — 1985. — C.83-90.

[8] I. Hong, T. Uno. *Some consideration of asymptotic distribution of eigenvalues for the equation* $d^2u/dx^2 + \lambda\rho(x)u = 0$// Japanese Journ. of Math. — 1959. — T.29. — C.152-164.

[9] H. P. McKean, D. B. Ray. *Spectral distribution of a differential operator*// Duke Math. Journ. — 1962. — T.29. — C.281-292.

[10] А. И. Назаров. *Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры*// Записки науч. семинаров ПОМИ. — 2004. — Т. 311. — С. 190–213.

[11] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом*// Матем. сборник. — 2006. — Т. 197, № 11. — С. 13–30.

[12] А. А. Владимиров. *Осцилляционный метод в задаче о спектре дифференциального оператора четвёртого порядка с самоподобным весом*// `arxiv:1107.4791`

[13] И. А. Шейпак. *О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0,1]$*// Матем. заметки. — 2007. — Т. 81, № 6. — С. 924–938.

[14] J. E. Hutchinson. *Fractals and self similarity*// Indiana Univ. Math. J.— 1981. — T. 30, № 5. — C. 713–747.

[15] А. А. Владимиров. *К осцилляционной теории задачи Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами*// Журнал выч. матем. и матем. физ. — 2009. — Т. 49, № 9. — С. 1609–1621.

[16] А. И. Назаров. *Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций*// Теория вероятностей и ее применения. — 2009. — Т. 54. № 2. — С. 209–225.