О-фреймы для операторов в банаховых пространсвах

Олег Рейнов

В работе введено новое понятие О-фрема для оператора в банаховых пространствах. Исследованы ограниченно полные и натягивающие О-фреймы. Показано, что оператор имеет О-фрейм тогда и только тогда, когда 1) он факторизуется через пространство с базисом, и, если он действует из сепарабельного пространства, то тогда и только тогда, когда 2) он обладает свойством ограниченной аппроксимации. Среди прочего, аналогичный факт установлен для введенных здесь же БО-фреймов (безусловных операторных фреймов).

Также, например, установлено, что всякий оператор имеющий ограниченно полный и натягивающий О-фрейм, слабо компактен. Приведены и другие применения. Одно из них: дан отрицательный ответ на вопрос Марии Скопиной о существовании в $L_1(0,1)$ безусловной системы представления.

§1. О-фреймы

Мы используем стандартные обозначения и терминолргию теории операторов в банаховых пространствах (см., например, [2]).

Определение 1.1. Пусть $T \in L(X,W)$, $(x'_k)_{k=1}^\infty \subset X^*, (w_k)_{k=1}^\infty \subset W$. Мы говорим, что $\mathcal{F} := ((x'_k)_{k=1}^\infty, (w_k)_{k=1}^\infty)$ есть О-фрейм для T, если для каждого $x \in X$ ряд $\sum_{k=1}^\infty \langle x'_k, x\rangle w_k$ сходится в W и

$$Tx = \sum_{k=1}^\infty \langle x'_k, x\rangle w_k, \quad x \in X.$$

Если существует О-фрейм для T, то мы говорим, что T имеет О-фрейм.

Примеры, 1) Пусть $\Delta : l_\infty \to l_1$ — диагональный оператор с диагональю $(\delta_k) \in l_1$. Тогда $\Delta x = \sum \langle e_k, x\rangle e_k$, где (e_k) — последовательность единичных векторов в l_p (в нашем случае, в l_1), $x = (x_k) \in l_\infty$.

2) Если в X есть базис Шаудера $(f_k)_{k=1}^\infty$, то для любого $x \in X$ имеем: $x = \sum_{k=1}^\infty \langle f'_k, x\rangle f_k$, где (f'_k) — биортогональная к (f_k) система. Следовательно, для любого банахова пространства W и каждого оператора $T : X \to W$

$$Tx = \sum_{k=1}^\infty \langle f'_k, x\rangle Tf_k, \quad x \in X.$$

AMS Subject Classification 2010: 46B28 Spaces of operators; tensor products; approximation properties.

Key words: 46B28 Approximation of operators; bounded approximation property.

3) Если W имеет базис Шаудера, например, (w_k) с биортогональной системой (w'_k), то всякий элемент $w \in W$ разлагается в ряд $w = \sum_{k=1}^{\infty} \langle w'_k, w\rangle w_k$ и для $x \in X$ и $T : X \to W$ получаем: $\langle Tx, w'_k\rangle = \langle x, T^* w'_k\rangle$ и, следовательно, $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle T^* w'_k, x\rangle w_k$. Отметим, что в этом примере пространство W сепарабельно, а пространство X не обязано быть сепарабельным.

4) Если пространство X сепарабельно и обладает свойством ограниченной аппроксмации, то оно дополняемо вкладывается в некоторое банахово пространство X_0 с базисом [3]. Пусть $P : X_0 \to X$ — непрерывный проектоор и $((x'_k), (x_k))$ — базис для X_0 (т.е., соответствующая биортогональная систеьа). Тогда для $x_0 \in X_0$ мы имеем разложение $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x_0\rangle x_k$ и, если $x \in X$ и $x = Px_0$, то $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x_0\rangle Px_k$. Но $x \in X \subset X_0$; следовательно, $x = Px$ и

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x\rangle x_k = P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x\rangle Px_k.$$

Теперь, любой оператор $T \in L(X, W)$ имеет О-фрейм с разложением вида

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k|_X, x\rangle TPx_k.$$

Аналогичный пример можно рассмотреть и для случая, когда W сепарабельно и обладает свойством ограниченной аппроксимации.

Лемма 1.1. *Пусть X, V, Z, W — банаховы пространства, $T \in L(X, W)$, $A \in L(W, V), B \in L(Z, X)$. Если оператор T имеет О-фрейм, то и оператор $ATB : Z \to V$ имеет О-фрейм.*

Доказательство. Пусть $((x'_k), (w_k))$ — О-фрейм для T. Зафиксируем $z \in Z$, и пусть $x = Bz$. Тогда $Tx = \sum \langle x'_k, x\rangle w_k$, $ATx = \sum \langle x'_k, x\rangle Aw_k$ и $ATBz = ATx = \sum \langle x'_k, Bz\rangle Aw_k = \sum \langle B^* x'_k, z\rangle Aw_k$. Таким образом, $((B^* x'_k), (Aw_k))$ есть О-фрейм для оператора ATB.

Следствие 1.1. *Если оператор $T \in L(X, W)$ факторизуется через банахово пространство с базисом Шаудера, то он имеет О-фрейм.*

Доказательство. Применяем лемму 1.1 и примеры 2–3.

Следствие 1.2. *Если оператор $T \in L(X, W)$ факторизуется через банахово пространство со свойством ограниченной аппроксимации, то он имеет О-фрейм.*

И еще одно свойство О-фреймов:

Предложение 1.1. Пусть $\mathcal{F} := ((x'_k), (w_k))$ есть О-фрейм для $T \in L(X.W)$. Тогда дуальная система $\mathcal{F}^d := ((w_k), (x'_k))$ есть w^*-слабый О-фрейм для T^*, то есть

$$T^* w' = w^*\text{-}\lim_N \sum_{k=1}^{N} \langle w', w_k\rangle x'_k, \quad w' \in W^*.$$

Доказательство. Для $w' \in W^*$ и $x \in X$ имеем:

$$\langle Tx, w' \rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x \rangle w_k, w' \rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle w', w_k \rangle x'_k, x \rangle,$$

откуда $T^* w' = w^*\text{-} \lim_N \sum_{k=1}^{N} x'_k \langle w', w_k \rangle$ (предел в топологии $\sigma(X^*, X)$).

Пока мы рассмотрели лишь простейшие свойства О-фреймов. Намного более серьезные результаты появятся ниже.

В теории базисов и фреймов в банаховых пространствах часто возникают термины "натягивающий", "ограниченно полный" (см., например, [1], [2]). Мы вводим соответствующие понятия для операторных фреймов.

Определение 1.2. О-фрейм $((x'_k), (w_k))$ для T называется ограниченно полным, если для любого $x'' \in X^{**}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'', x'_k \rangle w_k$ сходится в пространстве W.

Определение 1.3. О-фрейм $((x'_k), (w_k))$ для T называется натягивающим, если для любого $w' \in W^*$ норма $|| \sum_{k=n+1}^{\infty} x'_k \langle w', w_k \rangle || \to 0$ при $n \to \infty$.

Предложение 1.2. Пусть $\mathcal{F} := ((x'_k), (w_k))$ есть О-фрейм для $T \in L(X.W)$. Дуальная система $\mathcal{F}^d := ((w_k), (x'_k))$ есть О-фрейм для T^* тогда и только тогда, когда О-фрейм $\mathcal{F}$ натягивающий.

Доказательство. Если О-фрейм $\mathcal{F}$ является натягивающим, то, во-первых (предложение 1.1), для $w' \in W^*$

$$T^* w' = w^*\text{-} \lim_N \sum_{k=1}^{N} \langle w', w_k \rangle x'_k$$

и, во-вторых,

$$|| \sum_{k=n+1}^{\infty} x'_k \langle w', w_k \rangle || \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle w', w_k \rangle x'_k$ сходится в X^*, причем к $T^* w'$.

Обратно, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle w', w_k \rangle x'_k$ сходится к x_0 в X^*, то, по тому же предложению 1.1, он сходится к $T^* w'$. Следовательно, остаток этого ряда стремится к нулю в X^*, то есть, О-фрейм $\mathcal{F}$ натягивающий.

Предложение 1.3. Пусть $\mathcal{F} := ((x'_k), (w_k))$ есть О-фрейм для $T \in L(X.W)$. Следующие утверждения равносильны:

1) О-фрейм $\mathcal{F}$ ограниченно полный;

2) для каждого $x'' \in X^{**}$ из ограниченности последовательности частичных сумм $(\sum_{k=1}^{N} \langle x'', x'_k \rangle w_k)_{N=1}^{\infty}$ вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'', x'_k \rangle w_k$ в пространстве W.

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $x'' \in X^{**}$. Надо показать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'', x'_k \rangle w_k$ сходится в W.

Для любых $w' \in W^*$ и $x \in X$ имеем:

$$\lim_{N\to\infty}\langle\sum_{k=1}^{N}\langle w', w_k\rangle x'_k, x\rangle = \lim_{N\to\infty}\langle w', \sum_{k=1}^{N} w_k\langle x'_k, x\rangle\rangle = \langle w', Tx\rangle.$$

В частности, последовательность $(\sum_{k=1}^{N}\langle w', w_k\rangle x'_k)_{N=1}^{\infty}$ ограничена в X^*. Поэтому, для $w' \in W^*$ и $x'' \in X^{**}$ числовая последовательность

$$(\sum_{k=1}^{N}\langle w', w_k\rangle\langle x'', x'_k\rangle)_{N=1}^{\infty}$$

ограничена, то есть последовательность $(\sum_{k=1}^{N} w_k\langle x'', x'_k\rangle)_{N=1}^{\infty}$ является $\sigma(W, W^*)$-ограниченной. Следовательно, она сильно ограничена в W. По условию 2), ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\langle x'', x'_k\rangle w_k$ сходится в пространстве W, т.е. наш О-фрейм $\mathcal{F}$ — ограниченно полный.

Применяя оба предложения, получаем один из основных фактов данного раздела:

Теорема 1.1. Пусть $\mathcal{F} := ((x'_k), (w_k))$ есть О-фрейм для $T \in L(X.W)$. Если этот О-фрейм $\mathcal{F}$ ограниченно полный и натягивающий, то оператор T слабо компактен.

Доказательство. Так как $\mathcal{F}$ натягивающий, то по предложению 1.2 $\mathcal{F}^d$ есть О-фрейм для T^*, т.е. для любого $w' \in W^*$

$$T^*w' = \sum_{k=1}^{\infty}\langle w', w_k\rangle x'_k.$$

Поэтому, для $x'' \in X^{**}$

$$\langle T^*w', x''\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle w', w_k\rangle\langle x'', x'_k\rangle = \lim_{N}\langle w', \sum_{k=1}^{N}\langle x'', x'_k\rangle w_k\rangle,$$

или

$$\langle w', T^{**}x''\rangle = \lim_{N}\langle w', \sum_{k=1}^{N}\langle x'', x'_k\rangle w_k\rangle.$$

Так как $\mathcal{F}$ есть ограниченно полный О-фрейм, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\langle x'', x'_k\rangle w_k$ сходится в W, пусть, например, к элементу $w_0 \in W$. Следовательно,

$$\langle w', T^{**}x''\rangle = \langle w', \sum_{k=1}^{\infty}\langle x'', x'_k\rangle w_k\rangle. \quad w' \in W^*.$$

Или: $\langle T^{**}x'', w'\rangle = \langle w', w_0\rangle$ для всякого $w' \in W^*$. Таким образом, $T^{**}x'' = w_0$ и, в частности, $T^{**}x'' \in W$, то есть, если $x'' \in X^{**}$, то $T^{**}x'' \in W$ и, следовательно, оператор T слабо компактен.

Следующая теорема — первая из теорем, которые связывают введенное нами понятие О-фрейма и понятие свойства BAP (ограниченной аппроксимации) для операторов (подробней о BAP см. ниже).

Теорема 1.2. *Пусть $T \in L(X, W)$. Следующие утверждения равносильны:*

1) *T имеет О-фрейм;*

2) *оператор T факторизуется через банахово пространство с базисом Шаудера;*

3) *оператор T факторизуется через банахово пространство последовательностей с базисом Шаудера;*

Доказательство. Сначала мы покажем, что из 1) вытекает 3). Пусть оператор T имеет О-фрейм $\mathcal{F} := ((x'_k),(w_k))$. Мы можем (и будем) считать, что $w_k \neq 0$ для каждого k. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\langle x'_k, x\rangle w_k$ сходится (к Tx) для каждого $x \in X$, то нормы операторов $\sum_{k=1}^{N} x'_k \otimes w_k$ (равномерно) ограничены (например, константой $K > 0$).

Рассмотрим пространство числовых последовательностей

$$t := \{a = (a_k)_{k=1}^{\infty} : \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k \text{ сходится в } W\},$$

и пусть e_k — k-й единичный вектор в t (т.е., $(e_k)_s = 0$ при $k \neq s$ и $(e_k)_k = 1$).

Положим

$$|||a|||_t := \sup_N || \sum_{k=1}^{N} a_k w_k || \ \ (\geq \lim_N || \sum_{k=1}^{N} a_k w_k ||).$$

Так как для финитной последовательности $a = (a_1, a_2, \dots, a_{N+s}, 0, 0, \dots)$

$$||| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k ||| \leq ||| \sum_{k=1}^{N+s} a_k e_k |||$$

и линейная оболочка векторов $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ плотна в t, то (e_k) — монотонный базис (см. [2]) в банаховом пространстве t. При этом, если $j : t \to W$ — естественное отображение $a \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k$, то $||j|| \leq 1$ (по определению нормы $|||\cdot|||$ в t). Положим $Ax := (\langle x'_k, x\rangle)_{k=1}^{\infty}$; так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\langle x'_k, x\rangle w_k$ сходится, то $Ax \in t$. Далее,

$$|||Ax|||_t = \sup_N || \sum_{k=1}^{N} \langle x'_k, x\rangle w_k || \leq K\, ||x||, \ \ \forall\, x \in X.$$

Таким образом, линейное отображение A непрерывно из X в t, и $T = jA : X \to t \to W$.

3) влечет 2) — очевидно, а утверждение 1) вытекает из утверждения 2) по следствию 1.1.

Наряду с понятием О-фрейма, мы можем рассмотреть (и кратко рассмотрим) понятие безусловного О-фрейма.

Определение 1.4. Пусть $T \in L(X, W)$, $(x'_k)_{k=1}^{\infty} \subset X^*, (w_k)_{k=1}^{\infty} \subset W$. Мы говорим, что $\mathcal{F} := ((x'_k)_{k=1}^{\infty}, (w_k)_{k=1}^{\infty})$ есть БО-фрейм для T, если для каждого $x \in X$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\langle x'_k, x\rangle w_k$ сходится безусловно в W и

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x'_k, x\rangle w_k, \ \ x \in X.$$

Если существует БО-фрейм для T, то мы говорим, что T имеет БО-фрейм.

Теорема 1.3. *Пусть $T \in L(X, W)$. Следующие утверждения равносильны:*

1) *T имеет БО-фрейм;*

2) *оператор T факторизуется через банахово пространство с безусловным базисом;*

3) *оператор T факторизуется через банахово пространство последовательностей с безусловным базисом.*

Доказательство. Сначала мы покажем, что из 1) вытекает 3). Пусть оператор T имеет БО-фрейм $\mathcal{F} := ((x'_k), (w_k))$. Мы можем (и будем) считать, что $w_k \neq 0$ для каждого k. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x\rangle w_k$ безусловно сходится (к Tx) для каждого $x \in X$, то билинейная форма $B(\cdot, \cdot) : X \times l_\infty \to X$, определенная для $x \in X$ и $a \in l_\infty$ формулой $B(x, a) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle x'_k, x\rangle w_k$, ограничена.

Рассмотрим пространство числовых последовательностей

$$u := \{a = (a_k)_{k=1}^{\infty} : \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k \text{ безусловно сходится в } W\},$$

и пусть e_k — k-й единичный вектор в t (т.е., $(e_k)_s = 0$ при $k \neq s$ и $(e_k)_k = 1$).

Положим

$$|||a|||_u := \sup_{||(b_k)||_{l_\infty} \leq 1} ||\sum_{k=1}^{\infty} b_k a_k w_k||.$$

Тогда (e_k) — безусловный базис в банаховом пространстве u. При этом, если $j : u \to W$ — естественное отображение $a \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k$, то $||j|| \leq 1$ (по определению нормы $|||\cdot|||$ в u). Положим $Ax := (\langle x'_k, x\rangle)_{k=1}^{\infty}$; так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x\rangle w_k$ безусловно сходится, то $Ax \in t$. Далее,

$$|||Ax|||_t = \sup_{||(b_k)||_{l_\infty} \leq 1} ||\sum_{k=1}^{\infty} b_k \langle x'_k, x\rangle w_k|| \leq ||B||\,||x|| \quad \forall\, x \in X.$$

Таким образом, линейное отображение A непрерывно из X в u, и $T = jA : X \to u \to W$.

То, что 3) влечет 2) и 2) влечет 1) — очевидно.

В качестве одного из следствий последнего факта, приведем ответ на вопрос Марии Скопиной (примерно трех-летней давности; тогда я ответил на вопрос о существовании в L_1 безусловной системы представления, используя совершенно другие соображения):

Следствие 1.3. Пространство $L_1(0, 1)$ не имеет счетной безусловной системы представления, то есть, тождественный оператор в этом пространстве не обладает безусловным фреймом.

Для доказательства достаточно вспомнить теорему А. Пелчинского (см. [2, p.24; 1.d.1]): пространство $L_1(0, 1)$ не является подпространством банахова пространства с безусловным базисом.

Наша следующая цель — связать понятие О-фрейма со свойством ограниченной аппроксимации операторов.

§2. Об операторах со свойством ограниченной аппроксимации

Определение 2.1. Пусть $T \in L(X,W)$, $C \geq 1$. Мы говорим, что T имеет свойство C-BAP (свойство C-ограниченной аппроксимации), если для всякого компактного подмножества K из X, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой конечномерный оператор $R : X \to W$, что $||R|| \leq C\,||T||$ и $\sup_{x\in K}||Rx - Tx|| \leq \varepsilon$. Оператор T имеет (свойство) BAP, если он имеет свойство C-BAP для некоторой постоянной $C \in [1,\infty)$.

Лемма 2.1. T имеет C-BAP тогда и только тогда, когда для любого конечного семейства $(x_k)_{k=1}^N \subset X$, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой конечномерный оператор $R : X \to W$, что $||R|| \leq C||T||$ и $\sup_{1\leq k\leq N}||Rx_k - Tx_k|| \leq \varepsilon$.

Доказательство. Мы можем (и будем) считать, что $||T|| = 1$. Зафиксируем компактное подмножество $K \subset X$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $\varepsilon_0 := \varepsilon/(2+C)$, $(x_k)_{k=1}^M$ — ε_0-сеть для K в X, $R \in X^* \otimes W$, $||R|| \leq C$ и $\sup_{1\leq k\leq M}||Rx_k - Tx_k|| \leq \varepsilon_0$. Возьмем произвольный $x \in K$, и пусть x_k таков, что $||x - x_k|| \leq \varepsilon_0$. Тогда $||Tx - Rx|| \leq ||x - x_k|| + ||Tx_k - Rx_k|| + ||Rx_k - Rx|| \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_0 + C\varepsilon_0 = \varepsilon$.

Лемма 2.2. Пусть X, W — банаховы пространства, причем пространство X сепарабельно, и $T \in L(X,W)$. T имеет C-BAP тогда и только тогда, когда существует последовательность $(Q_l)_{l=1}^\infty$ конечномерных операторов из X в W, для которой

1) при любом $x \in X$ ряд $\sum_{l=1}^\infty Q_l x$ сходится и

$$Tx = \sum_{l=1}^{\infty} Q_l x,\ \ x \in X;$$

2) $\sup_N||\sum_{l=1}^N Q_l|| \leq C\,||T||$.

Доказательство. Так как X сепарабельно, то существует последовательность $(x_k)_1^\infty$, которая плотна в замкнутом единичном шаре $\bar{B}_1(0)$ пространства X. Предположим, как и выше, что $||T|| = 1$ и T имеет C-BAP, то есть для каждого конечного множества $F \subset X$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой конечномерный оператор $R : X \to W$, что $||R|| \leq C$ и $\sup_{f\in F}||Rf - Tf|| \leq \varepsilon$. Для каждого N, пусть R_N есть конечнмерный оператор из X в W со следующими свойствами:

(i) $||R_N|| \leq C$ и

(ii) $\sup_{1\leq n\leq N}||R_N x_n - Tx_n|| \leq 1/2^{N+1}$.

Если $n \in \mathbb{N}$, то для всякого $N \geq n$ имеем:

$$(iii)\ \ ||R_N x_n - Tx_n|| \leq \frac{1}{2^{N+1}}$$

и, следовательно, для фиксированного x_n

$$R_N x_n \to Tx_n$$

при N стремящемся к ∞.

Теперь, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть $\delta > 0$ таково, что $C\delta + \delta < \varepsilon$. Для $x \in \bar{B}_1(0)$, возьмем такой x_n, что $||x_n - x|| < \delta$. Тогда найдется такой номер N_0, что при $N \geq N_0$

$$||R_N x - Tx|| \leq ||R_N||\,||x_n - x|| + ||R_N x_n - Tx_n|| + ||Tx_n - Tx|| \leq C\delta + ||T||\delta < \varepsilon.$$

Таким образом, если $x \in X$, то $R_N x \to Tx$ при $N \to +\infty$.

Для завершения доказательства в части "только тогда" мы применим лемму:

Лемма 2.3. Пусть X, W — произвольные банаховы пространства, $C \geq 1$ и $T \in L(X,W)$. Предположим, что

(*) существует такая последовательность $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ конечномерных операторов из X в W, что если $x \in X$, то $S_N x \to Tx$ при $N \to +\infty$ и $||S_N|| \leq C||T||$ для каждого N.

Тогда существует такая последовательность $(Q_l)_{l=1}^{\infty}$ конечномерных операторов из X в W, что

1) для любого $x \in X$ ряд $\sum_{l=1}^{\infty} Q_l x$ сходится и

$$Tx = \sum_{l=1}^{\infty} Q_l x, \ \ x \in X;$$

2) $\sup_N || \sum_{l=1}^{N} Q_l|| \leq C\,||T||$.

Доказательство. Мы снова предполагаем, что $||T|| = 1$. Положим $Q_1 := S_1, Q_l := S_l - S_{l-1}$ для $l > 1$, так что

$$S_N = S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots + (S_{N-1} - S_{N-2}) + (S_N - S_{N-1}) = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_N.$$

Отсюда следует, что

$$(1)\ Tx = \sum_{l=1}^{\infty} Q_l x \ \ \forall\, x \in X$$

и

$$(2)\ \sup_N || \sum_{l=1}^{N} Q_l|| = \sup_N ||S_N|| \leq C.$$

Часть "тогда, когда" доказательства леммы 2.2 вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2.4. Пусть X, W — произвольные банаховы пространства, $C \geq 1$ и $T \in L(X,W)$. Если существует последовательность $(R_N)_1^{\infty}$ конечномерных операторов из X в W, сходящаяся поточечно к T и такая. что $||R_N|| \leq C||T||$ для всех N, то T имеет C-BAP.

Доказательство. Действительно, пусть $R_N x \to Tx$ для каждого $x \in X$ (и $||R_N|| \leq C||T||$). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и компактное подмножество $K \subset X$. Положим $\varepsilon_0 := \varepsilon(||T|| + 1 + C||T||)^{-1}$. Выберем конечную ε_0-сеть $F \subset X$ для K и рассмотрим такой оператор R_{N_0}, что $\sup_{f \in F} ||R_{N_0} f - Tf|| \leq \varepsilon_0$. Тогда, для любого $x \in K$ найдется такой элемент $f_0 \in F$, что $||f_0 - x|| \leq \varepsilon_0$, и мы получаем:

$$||Tx - R_{N_0} x|| \leq ||T||\,\varepsilon_0 + \varepsilon_0 + ||R_{N_0}||\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0(||T|| + 1 + C||T||) = \varepsilon.$$

Следствие 2.1. Если X сепарабельно и $T \in L(X,W)$, то T имеет C-BAP тогда и только тогда, когда существует последовательность $(R_N)_1^{\infty}$ конечномерных операторов из X в W, которая поточечно сходится к оператору T и для которой $||R_N|| \leq C||T||$ для всех N.

Следствие 2.2. Если X сепарабельно и $T \in L(X, W)$, то T имеет BAP тогда и только тогда, когда существует последовательность конечномерных операторов из X в W, сходящаяся к оператору T поточечно.

§3. Свойство ограниченной аппроксимации и О-фреймы.

В этом разделе мы покажем, в частности, что каждый оператор в сепарабельных банаховых пространствах, обладающий свойством ограниченной апроксимации, имеет О-фрейм.

Мы будем использовать результаты предыдущего параграфа, но заменим некоторые обозначения, поскольку основная идея доказательства центральной теоремы 3.1 восходит к А. Пелчинскому и нам представляется, что наилучшим вариантом является вариант с использованием обозначений из его важной работы [3].

Пусть X, W — произвольные банаховы пространства, $T \in L(X, W)$ и T обладает свойством (*) из Леммы 2.3. Рассмотрим последовательность $(Q_l)_{l=1}^{\infty}$, полученную в утверждении Леммы 2.3, и положим $A_p := Q_p$ $(p = 1, 2, \dots)$ и $K := C(\geq 1)$, предполагая, что $||T|| = 1$. Сейчас мы — в обозначениях (частично) статьи [3].

Теорема 3.1. Если $T : X \to W$ имеет свойство (*), то есть, если существует такая последовательность $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ конечномерных операторов из X в W, что для любого $x \in X$ $\;S_N x \to Tx$ при $N \to +\infty$ и $||S_N|| \leq C||T||$ для каждого N, то оператор T имеет О-фрейм.

Доказательство. В вышеприведенных обозначениях (предполагая, что $||T|| = 1$), имеем:

$$Tx = \sum_{p=1}^{\infty} A_p x, \ \forall\, x \in X; \quad A_p \in X^* \otimes W, \ \sup_{n \in \mathbb{N}} ||\sum_{p=1}^{n} A_p|| \leq K$$

(заметим, что для каждого n $\;||A_n|| \leq ||\sum_{p=1}^{n} A_p - \sum_{p=1}^{n-1} A_p|| \leq 2K$). Пусть $E_p = A_p(X) \subset W$, $\;m_p := \dim E_p$ для $p \geq 1$ и $m_0 = 0$. Мы будем действовать как в [3].

По лемме Ауэрбаха, существуют такие одномерные операторы $B_j^{(p)} : E_p \to E_p$, что $||B_j^{(p)}|| = 1$ для $j = 1, 2, \dots, m_p$, и

$$\sum_{j=1}^{m_p} B_j^{(p)}(e) = e, \ e \in E_p.$$

Положим $C_i^{(p)} := \dfrac{1}{m_p} B_j^{(p)}$ для $i = rm_p + j$ (где $r = 0, 1, \ldots, m_p - 1; j = 1, 2, \ldots, m_p$). Тогда, для $e \in E_p$

$$\sum_{i=1}^{m_p^2} C_i^{(p)}(e) = m_p \cdot \sum_{j=1}^{m_p} \frac{1}{m_p} B_j^{(p)} e = \sum_{j=1}^{m_p} B_j^{(p)} e = e.$$

Кроме того, для любого $q \geq 1, q \leq m_p^2$ и некоторых $l < m_p$ и $k \leq m_p$ имеем:

$$||\sum_{i=1}^{q} C_i^{(p)}|| = ||\sum_{i=1}^{lm_p} C_i^{(p)} + \sum_{lm_p+1}^{lm_p+k} C_i^{(p)}|| \leq l \cdot \frac{1}{m_p} ||\sum_{j=1}^{m_p} B_j^{(p)}|| + \frac{1}{m_p} \cdot ||\sum_{j=1}^{k} B_j^{(p)}|| \leq 1 + 1 = 2.$$

Теперь, пусть

$$\widetilde{A}_s := C_i^{(p)} A_p$$

для $p \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, m_p^2$ и $s = m_0^2 + m_1^2 + \cdots + m_{p-1}^2 + i$. Одномерный оператор $\widetilde{A}_s$ отображает X в $E_p \subset W$ следующим образом:

$$\widetilde{A}_s : X \xrightarrow{A_p} E_p = A_p(X) \xrightarrow{C_i^{(p)}} E_p(\subset W).$$

Так как для каждого $n \in \mathbb{N}$, для некоторых k и $r \leq m_k^2$

$$\sum_{s=1}^{n} \widetilde{A}_s = \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{m_p^2} C_i^{(p)} A_p + \sum_{i=1}^{r} C_i^{(k)} A_k,$$

то мы получаем, что

$$||\sum_{s=1}^{n} \widetilde{A}_s|| \leq ||\sum_{p=1}^{k-1} A_p|| + ||\sum_{i=1}^{r} C_i^{(k)} A_k|| \leq K + 2||A_k|| \leq 5K.$$

Поскольку для каждого x, $x \in X$, $A_k x \to 0$ при $k \to \infty$, то:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{s=1}^{n} \widetilde{A}_s x = \lim_{N \to \infty} \sum_{p=1}^{N} A_p x = Tx.$$

Таким образом, $\sum_{s=1}^{\infty} \widetilde{A}_s(x) = Tx$, где $\widetilde{A}_s \in X^* \otimes W$ — одномерный оператор для любого s, откуда и следует, что оператор T имеет О-фрейм.

Из доказанной теоремы и результатов предыдущих параграфов получаем важнейшие следствия.

Следствие 3.1. Для любых банаховых пространств X и W и для любого оператора $T \in L(X, W)$ равносильны утверждения:

(1) T имеет О-фрейм;

(2) оператор T факторизуется через банахово пространство последовательностей с базисом;

(3) существует последовательность конечномерных операторов из X в W, сходящаяся к оператору T поточечно.

Следствие 3.2. Пусть X — сепарабельное банахово пространство, W — произвольное банахово пространство и $T \in L(X, W)$. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) T имеет О-фрейм;

(2) T обладает свойством ограниченной аппроксимации;

(3) оператор T факторизуется через банахово пространство с базисом Шаудера.

References

[1] P. Casazza, O. Christensen, D.T. Stoeva: *Frame expansions in separable Banach spaces*, J.Math.Anal.Appl., **307**(2) (2005), 710-723.

[2] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri: *Classical Banach spaces I: Sequence spaces*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer (1977).

[3] A. Pełczyński : *Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis*, Studia Math., **XL** (1971), 239-243.

St. Petersburg State University, Saint Petersburg, RUSSIA.
E-mail address: orein51@mail.ru