Свойство Шура и дифференцируемость

Олег Рейнов

Аннотация. Приводится обсуждение двух следующих результатов: 1) Банахово пространство X обладает свойством Шура тогда и только тогда, когда всякая слабо дифференцируемая функция из $\mathbb{R}$ в X является сильно дифференцируемой. 2) Банахово пространство X слабо секвенциально полно тогда и только тогда, когда всякая слабо дифференцируемая функция из $\mathbb{R}$ в X имеет слабую производную.

1. Любопытные (и даже иногда новые) теоремы возникают вследствие, как я их называю, "brain misprints"в формулировках задач (если они действительно таковые, а не ошибки постановщиков проблем, например, студентам). Об одной из подобного рода опечаток и о том результате, к которому она привела, хочется поделиться в этой короткой заметке.

Недавно ко мне обратился студент с просьбой о помощи ("идейной"; я в принципе не предоставляю студентам решение задач в подобных случаях, хотя бывают и малозначительные исключения) в доказательстве одного утверждения, которое (доказательство) было нужно ему для получения чего-то вроде допуска к экзамену. Вот так было сформулировано это утверждение:

($*$) Пусть X — банахово (вещественное) пространство и f — X-значная функция, заданная на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$. Предположим, что для каждого линейного непрерывного функционала l на X вещественная функция $l(f(\cdot))$ дифференцируема в каждой точке прямой. Показать, что для любого $t \in \mathbb{R}$ существует предел $\lim_{\tau\to 0} ||\dfrac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}||$.

Конечно, для аналитических функций комплексного переменного в подобного рода утверждениях не возникает сомнений: всякая слабо аналитическая (в некоторой области из $\mathbb{C}$) функция является сильно аналитической (см., например, [3 или 4, Theorem 3.10.1], [5 или 6, Теорема VI.4], а также Замечание 1 ниже). Но в вещественном случае с дифференцируемостью надо быть поосторожней. примером чему служит (кстати, используемая ниже) следующая известная функция:

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{1-t^2}}, & \text{если } |t| < 1 \\ 0, & \text{если } |t| \geq 1. \end{cases}$$

AMS Subject Classification 2010: 46G05 Derivatives.

Key words: Свойство Шура; слабо секвенциально полное пространство; слабая дифференцируемость.

В вещественном случае "теорема"($*$) очень похожа на утверждение об эквивалентности понятий слабой дифференцируемости и сильной дифференцируемости X-значных функций, заданных на $\mathbb{R}$. Последнее сходство навело нас на соображения, что факт ($*$) есть сомнительный факт, а также, что хорошо бы было посмотреть внимательней и понять (если, конечно, ($*$) неверно), какие банаховы пространства обладают соответствующими свойствами.

То, что ($*$) неверно, получилось достаточно быстро и просто. Действительно, рассмотрим последовательность $\{-1, -1/2, -1/3, \dots, -1/n, \dots\}$ точек вещественной прямой и в малой окрестности U_n каждой точки вида $-1/n$ построим бесконечно дифференцируемую функцию φ_n, аналогичную функции φ, рассмотренной выше, но несколько сжатую (и с тем свойством, что в точке $-1/n$ она принимает значение 1). В точке 0, справа от нее и слева от носителей всех функций φ_n, также как и между носителями функций φ_n и φ_{n+1}, определим значения новой функции Φ (она появится буквально через пару строк) как значения, равные нулю. Наконец, склеим все "попарно дизъюнктные" функции $\{\varphi_n\}$ и "нулевые куски", получив, таким образом, некоторую бесконечно дифференцируемую функцию Φ, заданную на всей прямой. Функция f, для которой утверждение ($*$) неверно (при $t = 0$) теперь строится так: пусть $X = c_0$, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ — семейство единичных векторов в c_0 и $(\chi_{U_n})_{n=1}^{\infty}$ — характеристические функции окрестностей U_n, в которых (в окрестностях) лежат носители соответствующих функций. Функция f, $f : \mathbb{R} \to c_0$, определяется для $t \in \mathbb{R}$ как

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n+1}\, t\Phi(t)\, \chi_n(t)\, e_n.$$

2. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, $U := U(t_0)$ — некоторая окрестность точки t_0 и $f : U \to X$ — функция со значениями в банаховом пространстве X.

Говорят, что функция f слабо дифференцируема в точке t_0, если для любого функционала $x' \in X^*$ вещественная функция $x' \circ f$ дифференцируема в этой точке. Если функция f слабо дифференцируема в t_0 и существует такой элемент $x_0 \in X$, что для всякого $x' \in X^*$ имеет место равенство $(x' \circ f)'(t_0) = \langle x', x_0 \rangle$, то мы называем этот элемент x_0 слабой производной функции f в точке t_0 (обозначение: w-$f'(t_0)$).

Функция f (сильно) дифференцируема в точке t_0, если в X существует предел

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{f(t_0 + \tau) - f(t_0)}{\tau},$$

и, в случае его существования, этот предел называется (сильной) производной функции f в точке t_0 (обозначение: $f'(t_0)$). Ясно, что

(1) Всякая дифференцируемая в точке t_0 функция является слабо дифференцируемой, и производная $f'(t_0)$ функции f является одновременно ее слабой производной.

Пример 1: Пусть $e_0 \in X, \varphi \in C^1(\mathbb{R})$ и $f : \mathbb{R} \to X, f(t) := \varphi(t)e_0$. В этом случае $f'(t) = \varphi'(t)e_0$.

Пусть $f : U \to X$ слабо дифференцируема в точке t_0. Для каждого функционала $x' \in X^*$ существует производная $\alpha_{x'} := (x' \circ f)'(t_0) \in \mathbb{R}$. Таким образом, имеем отображение $l : X^* \to \mathbb{R}$, $l : x' \mapsto \alpha_{x'}$. Для вещественных a, b и для $x'_1, x'_2 \in X^*$ выполняются соотношения $[(ax'_1 + bx'_2) \circ f]'(t_0) = a(x'_1 \circ f)'(t_0) + b(x'_2 \circ f)'(t_0) = a\alpha_{x'_1} + b\alpha_{x'_2}$, т. е. отображение l линейно. Обозначим через x_τ дробь $\dfrac{f(t_0+\tau) - f(t_0)}{\tau}$ (считая величину τ достаточно маленькой). Тогда $l(x') = \lim_{\tau \to 0} \langle x', x_\tau \rangle \in \mathbb{R}$. Рассмотрим какую-нибудь последовательность (τ_n), стремящуюся к нулю при $n \to \infty$. Для любого функционала $x' \in X^*$ последовательность $(\langle x', x_{\tau_n} \rangle)$ является последовательностью Коши, и, следовательно, последовательность (x_{τ_n}) ограничена по норме, скажем, константой $C > 0$.

(2) Если $f : U \to X$ слабо дифференцируема в точке t_0, $\tau_n \to 0$ и $t_0 + \tau_n \in U$, то последовательность (x_{τ_n}), где $x_{\tau_n} := \dfrac{f(t_0+\tau_n) - f(t_0)}{\tau_n}$, ограничена по норме константой C, зависящей только от $f, t_0, (\tau_n)$.

Отсюда: $|\alpha_{x'}| = \lim_n |\langle x', x_{\tau_n} \rangle| \le C\,||x'||$, т. е. $|l(x')| \le C\,||x'||$. Поэтому $l \in X^{**}$.

(3) Если функция $f : U \to X$ слабо дифференцируема в точке t_0, то существует такой функционал $x''_0 \in X^{**}$, что для всякого $x' \in X^*$ имеет место равенство $\langle x''_0, x' \rangle = (x' \circ f)'(t_0)$.

Вопрос: Когда $x''_0 = l \in X$?

Ответ — ниже (см. Теорему 2).

Пример 2 (Слабо дифференцируемая функция $F : [0,1] \to c_0$, для которой не существует w-$f'(0)$ в c_0) : Рассмотрим семейство отрезков $\{[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}]\}_{n=1}^\infty$. Пусть $e_1, e_2, \ldots,$ — последовательность единичных векторов (стандартный базис) в c_0. Определим функцию $f : [-1, 0) \to c_0$ следующим образом.

$$f(t) = \begin{cases} \text{для } t \in [-1, -\frac{1}{2}] & \text{положим } f(t) := e_1; \\ \text{для } t \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}] & \text{положим } f(t) := e_1 + \frac{t+1/2}{-1/3+1/2} e_2; \\ \text{вообще,} & \\ \text{для } t \in [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}] & \text{положим } f(t) := \sum_{k=1}^{n-1} e_k + \frac{t+1/n}{-1/(n+1)+1/n} e_n. \end{cases}$$

Так как $\alpha_n(t) := \dfrac{t + \frac{1}{n}}{-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}}$ есть непрерывная возрастающая функция на промежутке $[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}]$ и $\alpha_n(-\frac{1}{n}) = 0$, $\alpha_n(-\frac{1}{n+1}) = 1$, то $f(-\frac{1}{n}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1}$, $f(-\frac{1}{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} + e_n$ и

$$f(t) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} + \alpha_n(t) e_n \quad \text{для} \quad t \in \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right].$$

Отсюда следует, что функция f непрерывна на $[-1, 0)$. Если $\beta \in l_1$, то для $t \in [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}]$ имеем

$$\langle f(t), \beta \rangle = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1} + \alpha_n(t) \beta_n.$$

Пусть $e := (1, 1, \dots, 1, \dots) \in l_\infty$, $\beta \in l_1$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $N := N(\varepsilon)$ таково, что $\sum_{k=N}^{\infty} |\beta_k| < \varepsilon$. Рассматривая пространство c_0 как подпространство пространства l_∞, получаем: если $t \in [-\frac{1}{N+1}, 0)$, то для некоторого $n, n \geq N$,

$$|\langle f(t) - e, \beta \rangle| = |0 + 0 + \cdots + 0 + (\alpha_n(t) - 1)\beta_n| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |\beta_k| < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что $f(t) - e$ w^*-слабо стремится к нулю при t, стремящемся к нулю слева, т. е. $f(t) \underset{t \to 0-}{\to} e = (1, 1, \dots) \in l_\infty$ в топологии $\sigma(l_\infty, l_1)$.

Положим

$$F(t) = \begin{cases} tf(t), & \text{если } t \in [-1, 0), \\ 0, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Функция F, отображающая промежуток $[0, 1]$ в банахово пространство c_0, непрерывна и

$$w^*\text{-}\lim_{t \to 0-} \frac{F(t)}{t} = w^*\text{-}\lim_{t \to 0-} f(t) = e \in l_\infty \setminus c_0.$$

Таким образом, F есть слабо дифференцируемая c_0-значная функция, "слабая производная"которой не лежит в c_0.

3. Ясно, что всякая слабо дифференцируемая функция слабо непрерывна Мы имеем, однако:

(4) Если $f : U \to X$ слабо дифференцируема в точке t_0, то она сильно непрерывна в этой точке.

Действительно, пусть $x' \in X^*$ и $t_n = t_0 + \tau_n \in U$, причем $\tau_n \to 0$. Рассмотрим последовательность (x_{τ_n}) из утверждения (2). Имеем:

$$|x' \circ f(t_n) - x' \circ f(t_0)| = |x'(\frac{f(t_0 + \tau_n) - f(t_0)}{\tau_n})|\,|\tau_n| = |x'(x_{\tau_n})|\,|\tau_n| \leq C\,||x'||\,|\tau_n|,$$

откуда следут, что

$$||f(t_n) - f(t_0)|| \leq C\,|\tau_n| \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Замечание 1: Пусть, по-прежнему, $t_0 \in \mathbb{R}$, $U := U(t_0)$ — некоторая окрестность точки t_0 и $f : U \to X$ — функция со значениями в банаховом пространстве X. Функция f слабого класса C^1 в U, если на U функция f слабо непрерывно дифференцируема, т. е. для любого функционала $x' \in X^*$ композиция $x' \circ f$ имеет непрерывную производную на U. Функция f (сильного) класса C^1 в U, если на U функция f (сильно) непрерывно дифференцируема, т. е. f имеет непрерывную производную на U. Аналогично определяется понятия функции слабого или сильного класса C^n для $n > 1$. Лемма 2.1 из [2] (с достаточно простым доказательством) утверждает, что если $n \geq 1$ и Ω — область в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$. то всякая X-значная функция слабого класса C^{n+1} есть функция сильного класса C^n. Отсюда, кстати, следует соответствующее утверждение о слабо аналитических функциях (см. начало нашей заметки).

4. В этом последнем разделе мы приводим два главных наблюдения, сделанные нами при рассмотрении вопроса, с которого началась эта заметка. Напомним, что банахово пространство обладает свойством Шура, если всякая слабо сходящаяся к нулю последовательность его элементов сходится сильно (т. е. по норме и, естественно, к нулю; см., например, [1], стр. 37).

Теорема 1. Пусть X — (вещественное) банахово пространство и U — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}$. Следующие утверждения равносильны:

1) Всякая слабо дифференцируемая функция из $\mathbb{R}$ в X является сильно дифференцируемой на всей прямой.

2) Если $f : U \to X$ — функция, слабо дифференцируемая в нуле, то f сильно дифференцируема в нуле.

3) Если $t_0 \in \mathbb{R}$ и X-значная функция f определена в некоторой окрестности точки t_0 и слабо дифференцируема в этой точке, то она сильно дифференцируема в точке t_0.

4) Если f — слабо дифференцируемая функция из $\mathbb{R}$ в X, то для любой точки $t \in \mathbb{R}$ существует предел

$$\lim_{h\to 0} \left|\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|\right|.$$

5) Банахово пространство X обладает свойством Шура.

Доказательство. Импликации 5) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 4) очевидны. Докажем, что 4) влечет 5).

Предположим, что пространство X не обладает свойством Шура, и пусть (x_n) — последовательность векторов из X, которая слабо сходится к нулю, но нормы которых не меньше единицы и ограничены сверху некоторой постоянной $C : C > ||x_n|| \geq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Разобьем интервал $(0, 1]$ на счетное число интервалов вида $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $n = 1, 2, \ldots$. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ построим на интервале $I_n := (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ бесконечно дифференцируемую функцию φ_n (используя приведенный выше пример функции φ), которая равна единице в центре $t_n := \frac{2n+1}{n(n+1)}$ интервала I_n и равна нулю на левой и правой трети этого интервала I_n. Продолжив функцию φ_n на всю прямую тождественным нулем, получим C^∞-функцию φ_n (сохраним обозначение) из $\mathbb{R}$ в $[0, 1]$, носитель J_n которой есть замкнутый центральный отрезок интервала I_n, разбитого на три равных части:

$$J_n := \left[\frac{n+1/3}{n(n+1)}, \frac{n+2/3}{n(n+1)}\right].$$

Определим, наконец, функцию f как X-значную функцию, равную на каждом из интервалов I_n функции $(2C)^{-1-(-1)^n}\, t\varphi_n(t)\, x_n$ и нулю на остальной части прямой. Тогда не существует предела величины $||\frac{f(t+h)-f(t)}{h}||$ в точке $t = 0$ при h, стремящемся к нулю, поскольку $\frac{f(0+t_n)-f(0)}{t_n} = (2C)^{-1-(-1)^n}\, x_n$ и $1 \leq ||x_n|| < C$. Осталось заметить, что функция f является слабо дифференцируемой в каждой точке.

Теорема 2. Пусть X — (вещественное) банахово пространство и U — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{R}$. Следующие утверждения равносильны:

1) Всякая слабо дифференцируемая функция из $\mathbb{R}$ в X имеет слабую производную в любой точке прямой.

2) Если $f : U \to X$ — функция, слабо дифференцируемая в нуле, то существует слабая производная $w\text{-}f'(0)$ (как элемент пространства X).

3) Если $t_0 \in \mathbb{R}$ и X-значная функция f определена в некоторой окрестности точки t_0 и слабо дифференцируема в этой точке, то существует слабая производная $w\text{-}f'(t_0)$ (как элемент пространства X).

4) Банахово пространство X слабо секвенциально полно.

Доказательство. Ясно, что утверждения 1) – 3) равносильны между собой и утверждение 4) влечет, например, 2). Предположим, что пространство X не является слабо секвенциально полным, и пусть (x_n) — слабая последовательность Коши, которая сходится в топологии $\sigma(X^{**}, X^*)$ к элементу x'' из $X^{**} \setminus X$. Можно считать, что все рассматриваемые элементы по своим нормам не превосходят единицы.

Введем некоторые обозначения, которые позволят нам упростить изложение доказательства теоремы. Положим $e := x''(\in X^{**})$ и $e_1 := x_1, e_2 := x_2 - x_1, e_3 := x_3 - x_2, \ldots, e_n := x_n - x_{n-1}, \ldots;$ $(n > 1)$. Тогда $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = x_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ слабо* сходится в X^{**} к e. Определим функцию $f : [-1, 0) \to X$ по формулам, совершенно аналогичным формулам из Примера 2, полагая $f(t) = e_1$ для $t \in [-1, -1/2]$ и $f(t) := \sum_{k=1}^{n-1} e_k + \alpha_n(t)e_n$ для $t \in [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}]$ $(n > 1)$, где $\alpha_n(t) := \dfrac{t + \frac{1}{n}}{-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}}$. Зафиксируем $x' \in X^*$ и затем $\varepsilon > 0$. Пусть $N := N(\varepsilon)$ таково, что при всех $n \geq N$ имеем

$$|\langle x', x_{n+1} - x_n\rangle| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ и } \ |\langle x_n - e, x'\rangle| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $t \in [-\frac{1}{N+1}, 0)$, то для некоторого $n, n \geq N$,

$$|\langle f(t) - e, x'\rangle| = |\langle \sum_{k=1}^{n} e_k + \alpha_{n+1}(t)e_{n+1} - e, x'\rangle|$$

$$= |\langle x_n - e, x'\rangle + \langle \alpha_{n+1}(t)(x_{n+1} - x_n), x'\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\alpha_{n+1}(t) \leq \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что $f(t) - e$ w^*-слабо стремится к нулю при t, стремящемся к нулю слева, т. е. $f(t) \underset{t\to 0-}{\to} e \in X^{**}$ в топологии $\sigma(X^{**}, X^*)$.

Положим

$$F(t) = \begin{cases} tf(t), & \text{если } t \in [-1, 0), \\ -tf(-t), & \text{если } t \in (0.1], \\ 0, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Функция F, отображающая промежуток $[-1, 1]$ в банахово пространство X, непрерывна и

$$\sigma(X^{**}, X^*)\text{-}\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{t} = \sigma(X^{**}, X^*)\text{-}\lim_{t\to 0} f(t) = e \in X^{**} \setminus X.$$

Таким образом, F есть слабо дифференцируемая в нуле X-значная функция, "слабая производная"которой не лежит в X.

Список литературы

[1] Fernando Albiac, Nigel J. Kalton: *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics 233, Springer (2006), p. 37.

[2] J. Bochnak, J. Siciak: *Analytic functions in topological vector spaces*, Studia Math., **XXXIX** (1971), 77-112.

[3] Einar Hille ,Ralph S. Phillips : *Functional analysis and semi-groups*, Providence (1957), p. 93.

[4] Э. Хилле, Р. Филлипс: *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ (1962), с. 197.

[5] Michael Reed, Barry Simon: *Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis* , Academic Press (1980), p. 189.

[6] М.Рид, Б. Саймон: *Методы современной математической физики [том 1]*, Мир (1977), с. 212.

Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, РОССИЯ.

E-mail address: orein51@mail.ru