Sur valeurs propres des opérateurs (r, p)-nucléaires et conditions d'approximation d'ordre (r, p)

Oleg Reinov [a], Qaisar Latif [b]

[a] *Department of Mathematics and Mechanics, St. Petersburg State University, Saint Petersburg, RUSSIA*

[b] *Abdus Salam School of Mathematical Sciences, 68-B, New Muslim Town, Lahore 54600, PAKISTAN*

Résumé

Nous étudions la distribution des valeurs propres des opérateurs (r, p)-nucléaires, en présentant une petite partie de théorie de Fredholm de l'idéal correspondant, $N_{r,p}$. Par l'introduction d'une nouvelle notion de la propriété d'approximation, $AP_{r,p}$, d'ordre (r, p), nous donne différents exemples, montrant que les résultats obtenus sur les valeurs propres sont exactes. Pour cela, nous utilisons, en particulier, des exemples d'espaces sans les propriétés $AP_{r,p}$. Comme sous-produit de nos considération, nous obtenons quelques exemples d'opérateurs non s-nucléaire $(s < 1)$ avec s-nucléaires duals, répondant à une question de A. Hinrichs et A. Pietsch .

Abstract

On eigenvalues of (r, p)**-nclear operators and approximation properties of order** (r, p) We investigate the distribution of eigenvalues of (r, p)-nuclear operators, presenting a small part of Fredholm Theory for the corresponding ideal $N_{r,p}$. Introducing a new notion of the approximation property, $AP_{r,p}$. of order (r, p), we give different examples, showing that obtained eigenvalues results are sharp. For this we use, in particular, examples of spaces without the properties $AP_{r,p}$. As a by-product of our considerations, we obtain some examples of non s-nuclear operators $(s < 1)$ with s-niclear adjoints, answering a question of A. Hinrichs and A. Pietsch.

Cette note est inspirée par le résultat suivant qui a été prouvé dans [7] : $(*)$ Soit X un espace de Banach, soient $r \in (0, 1]$, $1 \le p \le 2$, $u \in X^*\widehat{\otimes}X$, où u est de la form $u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x'_i \otimes x_i$, où $(\lambda_i) \in l_r$, (x'_i) est une suite bornée dans X^* et $(x_i) \in l^w_{p'}(X)$. Si $1/r - 1/p = 1/2$, alors la suite des valeures propres de l'opérateur défini par u (répétées chacun celon son ordre de multiplicité) est sommable, et a pour somme trace u.

Soient X et Y deux espaces de Banach, et $X^*\widehat{\otimes}Y$ est le produit tensoriel projective (complété) de X^* et Y. Soient $r \in (0, 1]$ et $1 \le p \le \infty$. On désigne par $X^*\widehat{\otimes}_{r,p}Y$ un sous-espace vectoriel de $X^*\widehat{\otimes}Y$: $u \in X^*\widehat{\otimes}_{r,p}Y$ si et seulement si u est de la form $u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x'_i \otimes y_i$,où $(\lambda_i) \in l_r$, (x'_i) est une suite bornée

$\star$. La recherche est soutenue par la Commission de l'Enseignement Supérieur du Pakistan et par des Subventions de RFBR 12-01-00216.

Email address: `orein51@mail.ru` (Oleg Reinov).

Preprint submitted to Elsevier Science *22 novembre 2014*

dans X^* et $(y_i) \in l^w_{p'}(X)$ (c'est que une séquence faiblement p'-sommable). Si $p = 1$, on a le produit tensoriel $X^*\widehat{\otimes}_r Y$ de A. Grothendieck [1], et $X^*\widehat{\otimes}_1 Y = X^*\widehat{\otimes} Y$.

Il suit de $(*)$: *Soit X un espace de Banach, et soient $r \in (0, 1]$, $1 \leq p \leq 2$ et $1/r - 1/p = 1/2$. Alors l'application linéaire canonique de $X^*\widehat{\otimes}_{r,p} X$ dans $L(X, X)$ est biunivoque.*

Cette conséquence conduit à la definition suivante naturelle :

Définition 1 *Soit $r \in (0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$. On dit que un espace de Banach X satisfait à la condition d'approximation d'ordre (r, p) (à la condition $AP_{r,p}$) si, pour tout espace de Banach Y, l'application linéaire canonique de $Y^*\widehat{\otimes}_{r,p} X$ dans $L(Y, X)$ est biunivoque.*

Il n'est pas difficile à prouver :

Proposition 2 *Un espace de Banach X satisfait à la condition $AP_{r,p}$ si et seulement si l'application linéaire canonique de $X^*\widehat{\otimes}_{r,p} X$ dans $L(X, X)$ est biunivoque. En particulier, tout espace de Banach satisfait à la condition $AP_{r,p}$, où $r \in (0, 1]$, $1 \leq p \leq 2$ et $1/r - 1/p = 1/2$.*

On désigne par $N_{r,p}(X, Y)$ un espace d'applications ("nucléaires d'ordre (r, p)") associée à le produit tensoriel $X^*\widehat{\otimes}_{r,p} Y$, muni de la quasi-norme naturelle. Maintenant, nous allons formuler les principaux résultats de la note, et de montrer (exemples 1 - 3) que le théorème suivant est précis.

Théorème 3 *Soit X un espace de Banach, et soient $r \in (0, 1]$, $1 \leq p \leq 2$ et $1/s = 1/r - 1/p + 1/2$. Alors, pour tout $u \in X^*\widehat{\otimes}_{r,p} X$, la suite de valeurs propres $(\mu_k(\tilde{u}))$ de l'application $\tilde{u}$ défini par u (répétées chacun celon son ordre de multiplicité) est de puissance s'ème sommable, et on a $||(\mu_k(\tilde{u}))||_{l_s} \leq ||u||_{X^*\widehat{\otimes}_{r,p} X}$.*

Remarque 1 Sur les conditions de la théorème 3, $\tilde{u} = u$, c'est que l'application linéaire canonique de $X^*\widehat{\otimes}_{r,p} X$ dans $L(X, X)$ est biunivoque. Le cas où $p = 1$ est due à A. Grothendieck [1] ; le cas où $p = 2$ est due à A. Pietsch [5] .

Pour la preuve du théorème 3, nous avons besoin des deux résultats suivants, qui sont de leur propre intérêt. Pour appliquer ces propositions dans la preuve du théorème 3, nous utilisons également la deuxième partie de Proposition 2.

Rapelons que, E et F étant deus espaces de Banach, on désigne par $E\widehat{\widehat{\otimes}}F$ le produit tensoriel injective complété de E et F (un sous-espace vectoriel de $L(E^*, F)$, muni de la norme induite par $L(E^*, F)$).

Proposition 4 *Soient X_0, X, Y_0, Y des espaces de Banach, et soient $r \in (0, 1], p \in [1, \infty]$. Si $T \in N_{r,p}(X_0, Y_0)$ et $U \in N_{r,p}(X, Y)$, alors $T\widehat{\widehat{\otimes}}U \in N_{r,p}(X_0\widehat{\widehat{\otimes}}Y_0, X\widehat{\widehat{\otimes}}Y)$ et on a $||T\widehat{\widehat{\otimes}}U||_{N_{r,p}} \leq ||T||_{N_{r,p}}\, ||U||_{N_{r,p}}$.*

Soit $u \in X^*\widehat{\otimes} X$, où X est un espace de Banach. Le déterminant de Fredholm det $(1 - zu)$ de u est une fonction entièr det $(1 - zu) := 1 - \text{trace } u + \ldots + (-1)^n z^n \alpha_n(z) + \ldots$, don't les zéros sont exactment, avec les ordres de multiplicitée correspondants, les inverses des valeurs propres non nulles de l'opérateur $\tilde{u}$ défini par u (voir [1, Chap.II, p.13]).

Proposition 5 *Sur les conditions de la théorème 3, le déterminant de Fredholm de u, $u \in X^*\widehat{\otimes}_{r,p} X$, est une fonction entière d'ordre $\leq s$ et de genre zéro. Il existe un $M > 0$ tel que $|\det\,(1 - zu)| \leq e^{M\,|z|^s}$, $z \in \mathbb{C}$.*

Âpres les deux dernières propositions sont obtenues, pour terminer la preuve du théorème 3, nous appliquons théorèmes classiques de Hadamard, Jensen et Borel.

En consequence de la preuve, nous obtenons

Corollaire 6 *Sur les conditions de la théorème 3, la trace unique est bien défini et continue sur l'idéale $N_{r,p}$ de les opérateurs (r, p)-nucléaire (qui correspond au produit tensoriel $\widehat{\otimes}_{r,p}$).*

Corollaire 7 *Sur les conditions de la théorème 3, le determinant unique est bien défini et continue sur l'idéale $N_{r,p}$ de les opérateurs (r, p)-nucléaire.*

Pour montrer la précision des résultats ci-dessus, nous donnons quelques exemples (pas le plus simple) : nous aimerions présenter ici aussi quelques contre-exemples a quelques questions naturelles dans la théorie d'opérateurs dans les espaces de Banach (voir Remarque 5 pour l'idée des constructions).

Exemple 1 Soient $r \in (2/3, 1], p \in (1, 2], 1/r - 1/p = 1/2$. Il existe des espaces de Banach E et V, $z_0 \in E^*\widehat{\otimes} V, T \in L(V, E)$, telles que pour tout $p_0 \in [1, p)$

1) $z_0 \in E^* \widehat{\otimes}_{r,1} V$;
2) V satisfait à la condition d'approximation métrique de A. Grothendieck;
3) V est de type p_0 et de cotype 2;
4) $T \circ z_0 \in E^* \widehat{\otimes}_{r,p_0} E$;
5) trace $T \circ z_0 = 1$;
6) l'opérateur correspondant, $\widetilde{T \circ z_0}$, est identiquement nul, donc, n'a pas de valeur propre non nul.

Remarque 2 Pour $r = 1$ et $p = 2$, on obtient la exactitude d'une resultat correspondent de A. Pietsch [5].

Exemple 2 Soient $r \in [2/3, 1), p \in [1, 2), 1/r - 1/p = 1/2$. Il existe des espaces de Banach E et V, $z_0 \in E^* \widehat{\otimes} V, T \in L(V, E)$, telles que pour tout $\epsilon > 0$

1) $z_0 \in E^* \widehat{\otimes}_{r+\epsilon,1} V$;
2) V satisfait à la condition d'approximation métrique de A. Grothendieck;
3) $T \circ z_0 \in E^* \widehat{\otimes}_{r+\epsilon,p} E$;
5) trace $T \circ z_0 = 1$;
6) l'opérateur correspondant, $\widetilde{T \circ z_0}$, est identiquement nul, donc, n'a pas de valeur propre non nul.

Remarque 3 Pour $r = 2/3$ et $p = 1$, on obtient la exactitude d'une resultat correspondent classique de A. Grothendieck [1].

Remarque 4 Tous les résultats ci-dessus peuvent être formulés et se sont prouvé aussi pour le cas où l'on considéré la situation "dual", a savoir, les produits tensoriel $\widehat{\otimes}^{r,p}$, où dans la définition correspondante, la fonctionnelle sont faiblement p'-sommable et la sequence (x_k) appartient à l'espace l_r.

Remarque 5 Constructions dans les exemples 1 et 2 utilisent l'existence d'un élément tenseur $w \in X^* \widehat{\otimes} X$ avec une séparables X, tel que $w \neq 0$ et $\tilde{w} = 0$, et $w \in X^* \widehat{\otimes}_q X$ pour tout $q > 2/3$ (P. Enflo). Comme une question de fait, d'une part, nous construisons une paire $v_1 \in X^* \widehat{\otimes}_{r,1} Y$ et $S \in L(Y, X)$ avec réflexif séparable Y tel que $v := S \circ v_1 \in X^* \widehat{\otimes} X$ et admet une représentation d'une forme $v = \sum x'_k \otimes x_k$, où (x'_k) est faiblement p'_0-sommable pour tout $p_0 \in [1, p)$ et $(x_k) \in l_r(Y)$. De plus, trace $v = 1$, mais l'opérateur correspondant $\tilde{v} = 0$ (donc pas de non zéro valeurs propres). Pour obtenir exemple suivant, nous utilisons cette construction (c'est-a-dire, X, Y, v, v_1, S, r, p).

Ainsi, nous allons donner une autre (simple) exemple, qui répond simultanément en negatif question suivante posée dans [2] par A. Hinrichs et A. Pietsch (Problème 10.1) : soit $T \in L(X, Y), T^* \in N_s(Y^*, X^*), s \in (0, 1)$. Est-T s-nucléaire? [Comparer le résultat suivant des faits de papier de Reinov [6]]

Exemple 3 Soient $r \in (2/3, 1]$, $p \in (1, 2]$, $1/r - 1/p = 1/2$. Il existe deux espaces séparable de Banach X et Z tels que

(i) Z^{**} et séparable et a un base;
(ii) $\exists\, V \in X^* \widehat{\otimes} Z^{**}$: $V = \sum_{k=1}^{\infty} x'_k \otimes z''_k$; (x'_k) est faiblement p'_0-sommable pour tout $p_0 \in [1, p)$; $(z''_k) \in l_r(Z^{**})$ (c'est a dire, $V \in N^{r,p_0}(X, Z^{**})$;
(iii) $V(X) \subset Z$; V n'est pas nucléaire comme une application de X dans Z.

De plus, il existe un opérateur $U : Z^{**} \to Z$ tel que

(α) $\pi_Z U \in N^{r,p_0}(Z^{**}, Z^{**}) = Z^{***} \widehat{\otimes}^{r,p_0} Z^{**}$, $\forall\, p_0 \in [1, p)$;
(β) U n'est pas nucléaire comme une application de Z^{**} dans Z;
(γ) trace $\pi_Z U = 1$;
(δ) $\pi_Z U : Z^{**} \to Z^{**}$ n'a pas de valeurs propres non nul.

Preuve. Prenant X, $v \in X^* \widehat{\otimes} X$ comme ci-dessus avec trace $v = 1$ et $\tilde{v} = 0$, considérer (voir [4]) un espace de Banach séparable Z tel que Z^{**} est séparable, dispose d'une base, et il existe une application quotient $\varphi : Z^{**} \to X$ avec $\varphi^{-1}(0) = \pi_Z Z$ et $\varphi^*(X^*)$ étant complémenté dans Z^{***}. L'élément tenseur v peut être levé dans un élément tenseur $V \in X^* \widehat{\otimes} Z^{**}$ de sorte que $V = \sum_{k=1}^{\infty} x'_k \otimes z''_k$, ou (x'_k) est le faible p'_0-sommable pour chaque $p_0 \in [1, p)$ et $(z''_k) \in l_r(Z^{**})$. Puisque $\varphi V = \tilde{v} = 0$, alors $V(X) \subset \pi_Z Z = Z$; nous désignons par V_0 l'opérateur de X a Z définie par V. Par conséquent, $\varphi \pi_Z V_0 = \varphi V = 0$. Supposons que $V_0 \in N_1(X, Z)$, et laissez $V_0 = \sum f'_k \otimes z_k$ est une représentation nucléaire de V_0. Puis $V_0 \neq 0$, Z a l'AP et trace $\varphi\pi_Z V_0 = 1$. Mais trace $\varphi\pi_Z V_0 = \sum\langle f'_k, \varphi\pi_Z z_k\rangle = \sum 0 = 0$, car $\varphi|_{\pi_Z Z} = 0$. Donc, V_0 ne peut pas être nucléaire de X a Z. Soit dit en passant, V_0^* est, évidemment, r-nucléaire. Pour la deuxième partie de l'affirmation, il suffit de mettre $U := V_0\varphi : Z^{**} \to X \to Z$.

Nous terminons la note de donner une nouvelle preuve de la deuxième partie de Proposition 2, et nous espérons que cette démonstration est de son propre intérêt, en raison d'un caractére inhabituel. Pour cette raison :

Soit $X \notin AP_{r,p}$ ou $1/r - 1/p = 1/2$. Soit $z \in X^*\widehat{\otimes}_{r,p}X$ est telle que trace $z = 1, \tilde{z} = 0$. Depuis $z = \sum x'_k \otimes x_k$, ou $(x'_k) \in l_r(X^*)$ et (x_k) est faiblement p'-sommable, alors $\tilde{z}$ peut être pris comme

$$\tilde{z} = Vj\Delta A : \ X \to l_\infty \to l_1 \to l_p \to X,$$

où toutes les applications sont continues, $j : l_1 \to l_p$ est l'injection, $\Delta : l_\infty \to l_1$ est un opérateur diagonal avec une diagonale de l_r. Comme $\tilde{z} = 0$, on a que $V|_{j\Delta A(X)} = 0$. Considérez $S := j\Delta AV : l_p \to l_p$. De toute évidence, $S^2 = 0$ et trace $S =$ trace $z = 1$. Depuis $S \in N_r(l_p, l_p)$ (r-nucléaire), trace S est égal a la somme de toutes les valeurs propres de S (voir [3, Theorem 2.b.13], [8]). Une contradiction avec $S^2 = 0$.

Remarque 6 De la mémé maniéré (comme ci-dessus pour $AP_{r,p}$), on peut introduire la propriété d'approximation $AP^{r,p}$ d'ordre $(r,p)^{dual}$ (en utilisant le produit tensoriel $\widehat{\otimes}^{r,p}$; voir ci-dessus). Ensuite, nous pouvons montrer que tout espace de Banach satisfait à la condition d'approximation d'ordre $(r,p)^{dual}$, où $1/r - 1/p = 1/2$ (la preuve est analogue).

Remarque 7 Il y a une autre façon de prouver notre théorème principal 3 : utiliser la dernière assertion sur $AP_{r,p}$ pour tout espace de Banach, montrer que $N_{r,p}$ est de type spectral 1 et appliquer le théorème de White [9]. Comparer avec [8]. La mémé chose peut être dit a propos de la situation "dual" avec $N^{r,p}$-idéal.

Remarque 8 Et pour finir cette note, nous remarquons que le théorème 3 peut être prouve aussi (la troisième voie) par la méthode de Grothendieck [1] qui a été utilise par le premier auteur dans [7]. Sachant que $N_{r,p} = \widehat{\otimes}_{r,p}$ pour valeurs correspondantes (r,p) (une assertion ci-dessus), on peut déduire de la preuve dans [7] que dans (r,p)-cas, le déterminant de Fredholm est d'ordre s et de genre zéro. De la, il est facile d'obtenir la conclusion du théoréme 3. La mémé chose peut être fait pour la $N^{r,p}$-situation.

Références

[1] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et éspaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., 16 (1955).

[2] A. Hinrichs, A. Pietsch, p-nuclear operators in the sense of Grothendieck, Math. Nachr. 283 (2010), 232–261.

[3] H. König, Eigenvalue distribution of compact operators, Birkhäuser, Boston, 1986.

[4] J. Lindenstrauss, On James' paper "Separable Conjugate Spaces", Israel J. Math. 9 (1971), 279-284.

[5] A. Pietsch, Operator Ideals, North Holland, 1980.

[6] O.I. Reinov, Approximation properties AP_s and p-nuclear operators (the case $0 < s \leq 1$), Journal of Mathematical Sciences 115 (2003), 2243-2250.

[7] O.I. Reinov, Some more remarks on Grothendieck-Lidskii trace formulas, Journal of Prime Research in Mathematics, 8 (2012), 148-154.

[8] Oleg Reinov, Qaisar Latif, Grothendieck-Lidskii theorem for subspaces of L_p-spaces, Math. Nachr. 286 (2013), 279–282.

[9] M.C. White, Analytic multivalued functions and spectral trace, Math. Ann. 304 (1996), 665-683.