SPb. Math. Society Preprint 2016-12 22 Dec 2016

ФОРМУЛА МОНОТОННОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

Д.Е. Апушкинская, * Н.Н. Уральцева †

1 ВВЕДЕНИЕ

Формула монотонности - это необходимый инструмент исследования задач с разрывными нелинейностями, позволяющий обосновывать предельные переходы. Наша заметка посвящена локальной версии формулы монотонности типа формулы Вейсса для задачи, описывающей процессы с «эффектом памяти».

Пусть $\mathcal{U}$ - область в $\mathbb{R}^n$. Рассматривается параболическая задача

$$\begin{aligned} H[u] := \Delta u - \partial_t u = h[u] \quad \text{в} \quad Q = \mathcal{U} \times (0,T], \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{1}$$

Предполагается также, что u удовлетворяет либо условию Дирихле, либо условию Неймана на боковой поверхности цилиндра Q. Поскольку нас интересует локальный вариант формулы монотонности, который выполняется для внутренних точек Q, то мы не обращаем внимание на граничные условия.

Здесь $h[u] : C(\mathcal{U} \times [0,T]) \mapsto \{\pm 1\}$ обозначает оператор релейного вида, который однозначно определяется следующим образом. Зафиксируем два пороговых значения α и β ($\alpha < \beta$), обозначим через E множество

$$E := \{z = (x,t) \in Q : u(z) \leqslant \alpha\} \cup \{z \in Q : u(z) \geqslant \beta\} \cup \{\mathcal{U} \times \{0\}\},$$

*Electronic address: darya@math.uni-sb.de
†Electronic address: uraltsev@pdmi.ras.ru

и рассмотрим многозначную функцию $f : \mathbb{R} \mapsto \{\pm 1\}$ такую, что $f(s) = -1$ при $s \leqslant \alpha$, $f(s) = 1$ при $x \geqslant \beta$, а при $\alpha < s < \beta$ функция $f(s)$ может принимать оба значения $+1$ и -1, соответственно. Полагая $\varphi \in C^{1,1}(\mathcal{U})$, мы будем считать, что значения $h_0(x) := f(\varphi(x))$ изначально определены. Далее, положим

$$h[u](x, 0) = h_0(x), \qquad x \in \mathcal{U}. \tag{2}$$

Если $z \in E$, то $h[u](z) = f(u(z))$. В противном случае, для $z = (x, t) \in Q$ таких, что $\alpha < u(z) < \beta$ считаем $h[u](x, t) = h[u](x, \hat{t}(x))$, где $\hat{t}(x) = \max\{s : (x, s) \in E;\ s \leqslant t\}$.

Задачи вида (1)-(2) возникают при описании различных биологических, технологических и химических процессов (см., например, [1-2] и приведенную в них библиографию).

Рассматриваются так называемые «сильные решения» задачи (1)-(2), т.е. мы считаем, что $u \in W_q^{2,1}(Q)$, $q > n + 2$ и оператор $h[u]$ генерируется функцией u с учетом соотношения (2) согласно описанной выше процедуре, а также u удовлетворяет первому из уравнений (1) п.в. в Q.

Поскольку правая часть первого из уравнений (1) является разрывной функцией зависящей от u, то положение границы раздела фаз, где $h[u]$ принимает значения $+1$ и -1, априори неизвестно. Поэтому границу раздела фаз можно считать свободной границей. В работе [3] сильные решения (1)-(2) изучались с точки зрения теории задач со свободными границами, что позволило выяснить структуру свободной границы и установить локальную оптимальную регулярность решений. Поясним результаты [3] немного подробнее.

Положим $\Omega_\pm(u) := \{z = (x, t) \in Q,\ \text{где } h[u](z) = \pm 1\}$ и обозначим через $\Gamma(u) := \partial\Omega_+ \cap \partial\Omega_-$ свободную границу, т.е. множество, на котором $h[u](z)$ имеет скачок. В [3] установлено, что

$$\Gamma(u) = \Gamma_\alpha(u) \cup \Gamma_\beta(u) \cup \Gamma_v(u),$$

где $\Gamma_\alpha(u) := \Gamma(u) \cap \{u = \alpha\}$, $\Gamma_\beta(u) := \Gamma(u) \cap \{u = \beta\}$, а $\Gamma_v(u)$ представляет собой объединение цилиндрических поверхностей, образующие которых параллельны оси t. Заметим, что $\Gamma_v(u)$ является «паталогической» частью свободной границы, поскольку мы ничего не можем сказать о значениях u на $\Gamma_v(u)$. Также в [3] получена оценка для старших производных u в точках $z \in Q \setminus \Gamma(u)$:

$$|\partial_t u(z)| + |D^2 u(z)| \leqslant C(n, \rho_0, \varepsilon, \sup_Q |u|, \beta - \alpha). \tag{3}$$

Здесь $\rho_0 := \mathrm{dist}_p\{z, \Gamma_v\}$, $\varepsilon := \mathrm{dist}_p\{z, \partial' Q\}$, $\partial' Q$ - параболическая граница цилиндра Q, а dist_p обозначает параболическое расстояние от точки z до соотвествующего множества. Подчеркнем, что константа C в (3) не зависит от параболического расстояния от z до $\Gamma_\alpha(u) \cup \Gamma_\beta(u)$. К сожалению, избавится от зависимости C от ρ_0 пока не удалось.

Наличие оценки (3) гарантирует равномерную ограниченность масштабированных функций

$$u_r(x,t) = \frac{u(rx + x^0, r^2 t + t^0) - \alpha}{r^2} \tag{4}$$

в случае когда точка $z^0 = (x^0, t^0)$ отделена от Γ_v. Это дает возможность получить вариант формулы монотонности типа Вейсса для сильных решений задачи (1).

2 Формула монотонности

Положим $\Gamma^0_\alpha(u) := \Gamma_\alpha(u) \cap \{|\nabla u| = 0\}$, возьмем точку $z^0 = (x^0, t^0)$ на Γ^0_α удовлетворяющую условию $\mathrm{dist}_p\{z^0, \Gamma_v\} > 0$, и зададим функционал Вейсса формулой

$$W_R(r, x^0, t^0, u, \alpha) := \mathcal{W}_R(r, x^0, t^0, u, \alpha) + \mathcal{I}_R(r, x^0, t^0, u, \alpha),$$

где

$$\mathcal{W}_R(r, x^0, t^0, u, \alpha) = \frac{1}{r^4} \int\limits_{t^0-4r^2}^{t^0-r^2} \int\limits_{B_R(x^0)} \left(|Du|^2 + \frac{(u-\alpha)^2}{t - t^0} \right) G\left(x - x^0, t^0 - t\right) dxdt$$

и

$$\mathcal{I}_R(r, x^0, t^0, u, \alpha) = \frac{2}{r^4} \int\limits_{t^0-4r^2}^{t^0-r^2} \int\limits_{B_R(x^0)} \left(u^{[+]}_\alpha - u^{[-]}_\alpha \right) G(x - x^0, t^0 - t) dxdt.$$

Здесь r и R - положительные константы такие, что $B_R(x^0) \times (t^0 - 4r^2, t^0 - r^2) \subset \mathcal{U}$, тепловое ядро $G(x,t) = \frac{\exp(-|x|^2/4t)}{(4\pi t)^{n/2}}$ при $t > 0$ и $G(x,t) = 0$ при $t \leqslant 0$, а функции $u^{[\pm]}_\alpha$ определяются формулами

$$u^{[+]}_\alpha := \begin{cases} u - \alpha & \text{в} \quad \Omega_+(u) \\ 0 & \text{в} \quad \Omega_-(u) \end{cases}, \qquad u^{[-]}_\alpha := \begin{cases} 0 & \text{в} \quad \Omega_+(u) \\ u - \alpha & \text{в} \quad \Omega_-(u) \end{cases}.$$

Теорема. *Пусть u и z^0 такие, как описано ранее. Предположим также, что параметры r и R настолько малы, что выполнено условие*

$$\left\{B_R(x^0) \times (t^0 - 4r^2, t^0 - r^2)\right\} \cap \Gamma_v = \emptyset.$$

Тогда

$$\frac{dW_R(r, x^0, t^0, u, \alpha)}{dr} = \frac{1}{r} \int\limits_{-4}^{-1} \int\limits_{B_{R/r}} \frac{|\mathcal{L}u_r|^2}{-t} G(x, -t) dx dt + \mathcal{J}_R(r, u), \qquad (5)$$

где u_r - масштабированная функция из формулы (4),

$$\mathcal{L}u_r(x,t) := x \cdot Du_r(x,t) + 2t\partial_t u_r(x,t) - 2u_r(x,t),$$

а для остаточного члена $\mathcal{J}_R(r,u)$ *верна оценка*

$$|\mathcal{J}_R(r,u)| \leqslant N_0 \left(1 + \frac{1}{r}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+4} \exp\left(-\frac{R^2}{16r^2}\right) \qquad (6)$$

с универсальной константой $N_0 = N_0(n, M, \alpha)$.

Если параметр r достаточно мал и выполнены условия теоремы, то функционал $W_R(r, x^0, t^0, u)$ равномерно ограничен. Более того, оценка (6) гарантирует справедливость равенства

$$\lim_{r \to 0^+} |\mathcal{J}_R(r,u)| = 0.$$

Следствие. *Предположим, что выполнены все условия теоремы. Тогда*

функционал $W_R(r, x^0, t^0, u)$ *имеет предел при* $r \to 0^+$, *и этот предел не зависит от значений параметра* R.

Заметим, что для случая $z^0 = (x^0, t^0) \in \Gamma^0_\beta(u)$ с $\mathrm{dist}_p\,\{z^0, \Gamma_v\} > 0$ справедливо аналогичное утверждение. Отличие будет состоять лишь в том, что в этом случае необходимо определить масштабированную функцию как

$$u_r(x,t) = \frac{u(x^0 + rx, t^0 + r^2 t) - \beta}{r^2}$$

и заменить в N_0 и в определениях функционалов W_R, $\mathcal{W}_R$ и $\mathcal{I}_R$ параметр α на β.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 14-01-00534.

Список литературы

[1] D.E. Apushkinskaya and N.N. Uraltseva. Free boundaries in problems with hysteresis. // Phil. Trans. R. Soc. A, **373** (2015), 20140271.

[2] M. Curran, P. Gurevich, and S. Tikhomirov. Recent advances in reaction-diffusion equations with non-ideal relay. // Control of Self-Organizing Nonlinear Systems. 2016, p.211-234.

[3] D.E. Apushkinskaya and N.N. Uraltseva. On regularity properties of solutions to the hysteresis-type problem. // Interfaces Free Boundaries, **17** (2015), 93-115.